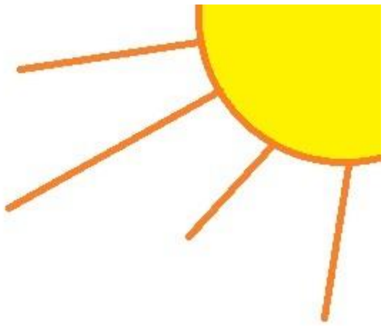
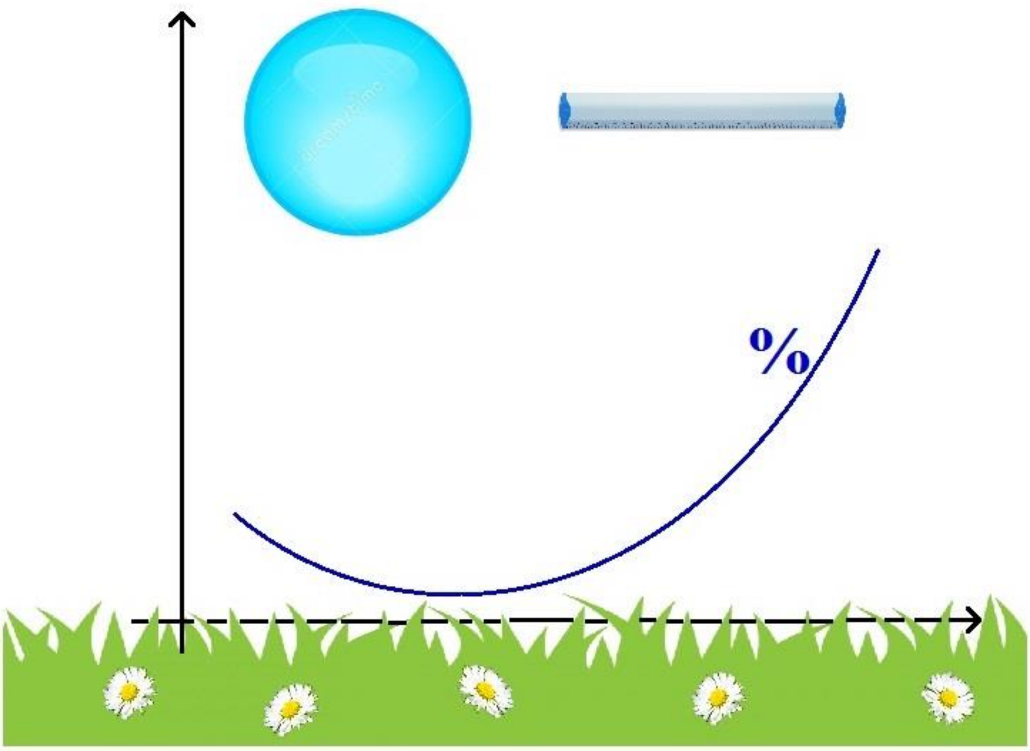
$\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$



Mathématiques pour Nous



Jean Alami

A mes professeurs Mr HOUVIEZ puis Mr PALLU de la BARRIERE (2nde au Lycée de Pontoise puis 1ère année d'Université Pierre et Marie Curie de Paris) qui contribuèrent à nous « dédramatiser » les Mathématiques

Note de l'auteur

Une « Université populaire » s'est créée à Poissy en Septembre 2017, à l'initiative de quelques-uns de ses concitoyens, dont sa présidente Madame Miriam MEIER, pour proposer, à la suite, plusieurs cycles de cours et conférences dans les disciplines les plus diverses à destination du tout public.

L'auteur de ce livret eut, dès lors, l' « audace » de proposer un « cours » de Mathématiques, afin de relever le défi de convaincre les gens que ces « Mathématiques » pouvaient leur apporter un réel bénéfice et, venir effacer le souvenir traumatisant, pour la plupart, d'un enseignement « subi » dans le passé.

Le but de cette démarche était de faire reposer cette intervention sur deux tableaux indistincts :

1. L'enjeu citoyen : s'approprier des « clés » de compréhension de notre monde par la simple maîtrise de calculs et d'une culture mathématique de base qui permette de décrypter, par exemple, une grande partie des « chiffres » assénés dans la jungle des informations.
2. Le plaisir de la découverte : comprendre au travers de l'histoire des connaissances, la signification des grandeurs qui nous entourent dans notre Monde.

Ce cours de Mathématiques, de fait, va le plus souvent bien au-delà des « Mathématiques », si ce n'est que pour exploiter au mieux sa pleine signification étymologique : « ce qui s'enseigne et qui s'apprend »

Ainsi, il est fait appel à notre socle commun de connaissances, à l'expérience de la vie, à notre faculté d'observer autour de nous ; le but final est de compléter notre culture générale et de nous approprier des outils qui peuvent nous être utiles, si ce n'est tous les jours, mais bien plus souvent qu'on pense.

La progression de ces chapitres ou « épisodes » suit un certain fil rouge qui permet, en plus de relier chaque épisode à la plupart de ceux qui le précèdent, d'appréhender comment les connaissances, qui semblent théoriques au premier abord, se retrouvent concrètement mises en service dans la vie ordinaire.

La création de ces « cours » s'est faite au fur et à mesure de l'année écoulée et, repose sur l'écriture qui emploie un jeu de couleurs (vert pour des rappels historiques, bleu pour des éclaircissements approfondis, etc…) pour renvoyer aussi bien à d'autres disciplines scientifiques qu'à l'histoire, la littérature, voire la philosophie basique et, pour oser également quelques traits d'humour ou poésie (rédigés à l'encre rose !)

Toutes les illustrations, graphiques et schémas résultent d'un travail de création original intégrant le texte, y compris lorsqu'il est fait appel à des portraits – pour rendre hommage aux scientifiques cités – qui sont souvent retravaillés en couleurs et format, afin de mieux se marier à l'esthétique générale du document.

La rédaction peut sembler parfois dense, et ne se destine pas à être forcément traitée pour chaque épisode, en l'espace de deux heures devant public, mais elle tient lieu de support propice à développer la curiosité des lecteurs qui désireraient approfondir tel ou tel sujet…

Les cours se sont adressés à des personnes disponibles en semaine, et donc pour la plupart, à la retraite, mais visaient également les mères ou pères au foyer… qui pourraient également être rejoints par des lycéen(ne)s en dehors de leurs cours imposés, car l'auteur est partisan des rencontres intergénérationnelles.

Note sur l'auteur :

Je suis devenu Ingénieur aérodynamicien, à la suite d'une double formation universitaire et en école d'ingénieurs ; formation choisie en vue d'un métier susceptible de marier conception scientifique et « design », par attirance pour la meilleure finesse aérodynamique comme esthétique, en somme.

De fait, il m'a été donné de participer à l'étude de la Fusée Ariane 5, en plus de me reporter sur l'Automobile, puis, je fus orienté vers l'enseignement, par goût invariable de transmettre, avant de m'engager dans la voie, intermédiaire aux deux précédentes, de la « médiation scientifique ».

C'est à la suite d'une mission de près de quatre ans pour la ville de Poissy que fut édité en 2014-2015 un premier livret de vulgarisation scientifique : « Les Bus Sciences de la Ville de Poissy »

Mes remerciements sont adressés tant à l'Université populaire de Poissy pour son accueil qu'à la Médiathèque de Poissy pour ses ressources, qui permirent qu'un cours « original » de Mathématiques soit ainsi restitué.

Fait à Poissy, le 15 Juin 2019

Table des matières

<u>*L'origine des Nombres et les bases de Calcul*</u>

De la fin du paléolithique au début de l'Histoire

Les premières traces de signes qui peuvent évoquer un comptage ou un dénombrement remontent à l'époque des premiers graphismes inscrits sur les parois de cavernes, soit il y a **30 ou 40 000 ans**, au même titre que les entailles retrouvées sur des bâtons ou os fossilisés.
Les premiers chiffres remontent tout bonnement à l'invention de l'écriture : nous passons de la préhistoire à l'antiquité avec le début des grandes civilisations il y a **6 à 7000 ans**

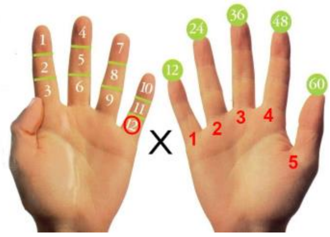
Les premiers raisonnements et calculs mathématiques s'établissent avec la maîtrise de l'écriture

Dès lors Mathématiques (étymologiquement) est « *ce qui s'enseigne et qui s'apprend* »

Les Bases d'Enumération et… de Calcul

Revenons au comptage : certaines cultures ont perpétué cette règle simple des premiers temps de différencier « Un » de « Deux » puis au-delà : « Beaucoup » mais au bout d'un moment le « Beaucoup fut jugé imprécis

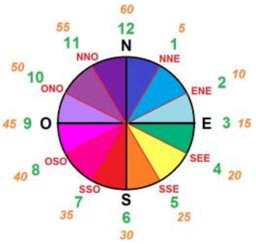
On s'exprimait beaucoup avec les mains, jusqu'à ce qu'on se rende compte que les mains étaient pleines de doigts (!)



On début, on se servit d'une main, puis rapidement des deux…

Par conséquent… on inventa les Bases 5 puis 10

Et enfin plus subtilement, en remarquant les 3 phalanges aux quatre doigts opposés au pouce, puis en combinant les deux mains on obtint 5×12 = 60 !



La Base 10 est quasi universelle

Quant à la Base 60, elle représente également l'Art astronomique (A force de contempler les étoiles, on désire les repérer) et une certaine façon de s'orienter dans l'Espace, y compris donc sur Terre (cf Enseignement n°2), (et de façon plus « terre à terre » encore améliorer, raffiner le partage des galettes (!) cf. Enseignement n°3)

On partage en 4 (les ponts cardinaux), puis chaque part en 3 (>La « Rose des Vents »)
Puis on rajoute cinq graduations aux 12 parts pour améliorer la précision : 3×4×5 = 60

Réminiscence de la Base 60 : *Les heures, les minutes, les secondes et… pourquoi pas les tierces ?*
Et pour finir de s'orienter, on a encore fractionné les graduations précédentes par 6 pour un tour complet en 360° à la place des 60 min qui du coup vont fractionner les degrés.

NB : Les secondes d'arc (division des min en 60 et donc degrés en 60×60 = 3600) ne sont pas de trop pour ne pas se tromper de quartier (!…calcul fait en 2ème enseignement)
(Si on veut s'orienter à la « grosse » on emploie les « heures » façon pilote d'avion, toujours plus précis cependant que désigner la droite ou la gauche ou devant…)

De nos jours, à l'ère numérique et du calcul informatique, on a recouru à la base 2 : Le **Binaire**, et s'en déduisent les systèmes **octal** et **sexagésimal** (en regroupant les digits - 0 ou 1 - par trois ou par quatre) de façon à rationaliser les circuits d'ordinateur : 1 Le courant passe 0 le courant ne passe pas.

Plusieurs Systèmes de numération donc, au cours de l'Histoire qui vit même les époques mélanger joyeusement plusieurs bases de calcul à la fois :
Par exemple, les Bases 2,3 et 4, donc Base 12 déduite, puis la Base 20, voire les Bases 7 et 11 à l'occasion…

Ainsi pour la monnaie, au Moyen âge jusqu'à la révolution, nous avions :
Une « Livre » valant 20 « sols » ou « sous » qui chacun valaient 12 « deniers »
Nous avons conservé des traces de Base 20 puisque nous disons « Quatre Vingts » et les « Quinze Vingts » désigne un hôpital pouvant accueillir à l'origine… 15×20 = 300 lits sur demande de notre Bon Roi Saint Louis

Les britanniques ont eu très longtemps leur « Livre Sterling » valant aussi 20 « Schillings» de 12 « pence ».
Nos écus valaient 10 sous et 6 deniers, soit dix sous et demi, et les anglais « impériaux » eurent plus tard recours à la « Guinée » valant le double : 21 shillings – Les aventures de *Sherlock Holmes* y font référence…
Toujours avec *Sherlock Holmes*, par recoupements, on déduit qu'un ¼ de « Mile » vaut 4×10×11 : 440 yards (440 pas de 3 pieds ×12 « pouces » de 25,4 mm) Ainsi le Mile vaut 4×440 : 1760 yards donc 1609,344 m.

En conclusion : que nous ont légué **les Grecs**, qui tout de même ont été de puissants mathématiciens qui manièrent les grands nombres voire les grands espaces ? Osons dire carrément … la Base **1000** !

10 ^	18	15	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12
grec	Hexa	Penta	Téra	Giga	Méga	kilo	mono	milli	micro	nano	pico
français	Trillion	Billiard	Billion	Milliard	Million	Mille	Un	Millième	Millionième	milliardième	
numérique	1 000 000 000 000 000 000	1 000 000 000 000 000	1 000 000 000 000	1 000 000 000	1 000 000	1 000	1	0,001	0,000001	0,000000001	…

10^{-15} : femto ; 10^{-18} : atto

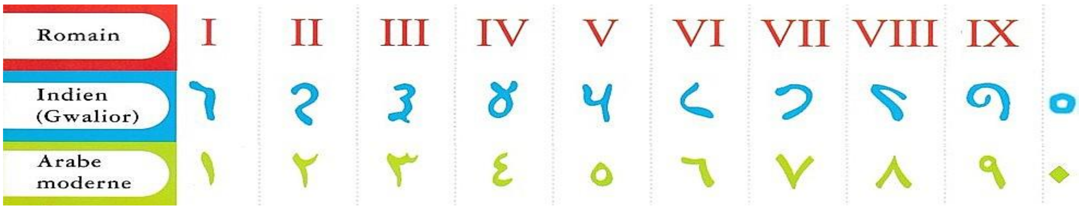
L’écriture des chiffres et la représentation des nombres

Au début, on comptait avec un certain nombre d’entailles puis avec des petits cailloux « calculus » du latin qui a donné plus tard « Calcul » . Pour garder trace du compte, on enfouissait ces petits cailloux dans de petites outres en Argile - telles des bourses - jusqu’à se rendre compte plus tard qu’on pouvait inscrire le nombre en caractères sur ces outres avant de finalement les aplatir en tablettes d’Argile sur lesquelles allait se développer l’écriture.

Contrairement à ce qu’on dit communément, nos chiffres les plus employés ne sont pas « arabes » à l’origine mais indiens. En fait, de la fin du premier millénaire jusqu’à l’aube de notre Renaissance, les Arabes ont été des passeurs de « Sciences » vers l’Occident. En effet, du fait de l’expansion de leur empire musulman des portes de l’Inde jusqu’en Andalousie à l’opposé, ils se sont approprié les savoirs des civilisations passées de l’Indus, de Mésopotamie et de Perse, de L’Egypte et de la Grèce antique, etc… avant de les enrichir, et d’en faire une synthèse transmissible avec leurs propres savants.

*Rappelons que beaucoup de termes mathématiques ont le préfixe arabe **al** : **Al**gèbre, **Al**gorithme,…*

Donc les chiffres tels que nous les connaissons sont en premier lieu indiens et ont remplacé - sans les faire disparaître - les chiffres romains qui avaient cours jusqu’au XII, XIIIème siècle.



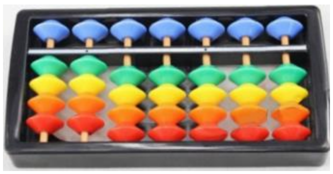
Nous pouvons reconnaître petit à petit des analogie d’écriture entre chiffres indiens, arabes et modernes. Nous pouvons déceler des évolutions d’écriture (comme les lettres de l’Alphabet) et en comprendre la logique.

Une invention tardive est celle du Zéro par les indiens qui impose dans les esprits que « Zéro n’est pas rien » et que cela va conférer même de la puissance aux chiffres (Ex : puissances de 10 en système décimal) pour former les nombres.

De l’écriture des nombres aux opérations de calcul

- L’opération la plus simple est l’**Addition** : un moyen évident d’y parvenir a été de regrouper les lots de cailloux que l’on désirait additionner puis d’en faire des petits tas de même quantité au besoin.

L’idée de regrouper les cailloux voire « d’enfiler les perles » comme cailloux a donné les premiers bouliers.



Les bouliers verticaux ont donné l’idées des premières « abaques » ou tableaux à colonnes (avant qu’abaques désignent également des graphiques pour déterminer des valeurs). C’est ainsi que l’écriture des nombres s’est rationalisée avec le système décimal d’origine indienne qui a permis d’additionner colonne par colonne, en employant les mêmes chiffres qui en fonction de leur position adoptaient une puissance différente de 10 mais additive.

$$275 = 200 + 70 + 5$$

Remarquons dans l’écriture des nombres que la logique voudrait que l’on commence par l’unité avant de terminer par le chiffre de plus grande puissance ; nous retrouvons cette logique dans le sens de la lecture de l’arabe, de droite à gauche… Comme on lit de gauche à droite, on a repris la logique héritée des chiffres romains qui insistent avant tout sur l’ordre de grandeur.

☺ Et c’est très important de maîtriser l’ordre de grandeur, plutôt que d’avoir une dizaine de décimales après la virgule (comme on le verra avec les nombres décimaux) car se tromper de colonne, voire d’emplacement de la virgule et on se plante d’un facteur 10 :
Résultat 10 fois grossi : le Pont s’écroule… 10 fois moindre : on construit un barrage à la place d’un Pont !

> Quoiqu’il en soit cela paraît moins lourd de devoir écrire

1694 que MMCCCCCCXXXXXXXXXIIII voire MMDCXCIV

Justement cette dernière astuce d’écriture des chiffres romains nous montre la voie pour comprendre l’analogie entre « j’avance : j’additionne : j’adopte le sens + » ou bien « je recule : je soustrais : le sens – »

– <------------------------------ 0 ---------------------------> +

On comprend ainsi qu’à l’**Addition**, on va immanquablement associer la **Soustraction**, aux nombres jusqu’alors positifs, leurs opposés négatifs et le Zéro élément neutre du milieu pour les deux Opérations.

➢ Addition et Soustraction de nombres : méthode des retenues

« Poser » une addition ou une soustraction revient à écrire d'abord les nombres en colonnes respectives, soit en quelque sorte s'apprêter à utiliser un tableau, une abaque, un boulier ou… leur représentation en tête !

Ex : Voyons comment se décompose l'Addition de 1694 à 2557 puis ↔ la Soustraction de 2557 au résultat

En partant de la Colonne des Unités (←)

	Mille	Cent	Dix	Un
	1	6	9	4
+	2	5	5	7
	3	11	14	11
	3	11	15	1
	3	12	5	1
	4	2	5	1
	4	2	5	1
-	2	5	5	7
	2	- 3	0	- 6
	2	- 3	- 1	4
	2	- 4	9	4
	1	6	9	4

En partant de la Colonne des Mille (→)

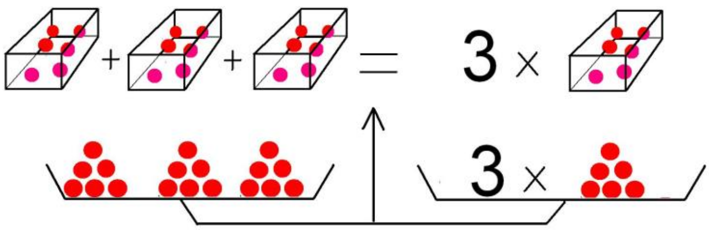
	Mille	Cent	Dix	Un
	1	6	9	4
+	2	5	5	7
	3	11	14	11
	4	1	14	11
	4	2	4	11
	4	2	5	1
	4	2	5	1
-	2	5	5	7
	2	- 3	0	- 6
	1	7	0	- 6
	1	7	0	- 6
	1	7	- 1	4
	1	6	9	4

On s'aperçoit que pour l'Addition, on aurait presque intérêt à additionner depuis les colonnes de gauche puisque se dégage très vite l'ordre de grandeur, quant à la soustraction : partir classiquement de la droite

En Addition, les retenues viennent s'ajouter à l'un des deux nombres au choix, colonne par colonne
En Soustraction, les retenues se retirent du 1er nombre ou s'ajoutent au nombre soustrait, colonne par colonne

❖ Comment en sommes-nous venus à la **Multiplication** puis à la **Division** ?

Plutôt que de rajouter inlassablement les nombres quantité par quantité, voire par part égale, on a gagné du temps en multipliant le nombre de parts égales :



Qu'avons-nous là ?

Une multiplication de lots contenant le même nombre d'unités comparée à l'addition de toutes les unités mises en commun
Soit encore la pesée de la même masse répliquée tant de fois comparée à l'addition des masses

En fait Egalité et Equilibre (de la pesée) signifient la même chose et ont même racine étymologique qu'encore l'expression Equation (comme ici l'équation 18 = 3×6) et repose sur le terme « égal » ou « equal »

A l'inverse, la division sert à répartir de façon égale une masse d'unités dans autant de Lots que l'on désire (si cela est possible…)

Division et **Multiplication** sont donc des Opérations inverses qui se neutralisent autour de leur élément neutre commun qui vaut Un

Plutôt que de subir certains restes, on va donc inventer les nombres « quotients » et plus généralement les nombres décimaux

➢ Comment multiplions nous et divisons nous les nombres ?

En exploitant la propriété de distribution de la Multiplication comme de la Division vis à vis de l'Addition ou de la Soustraction, et en se souvenant de la fabrique des nombres dans notre système décimal :

$$7 \times 24 = 7 \times (\underline{2}0 + 4) = 7\times20 + 7\times4 = 140 + 28 = 168$$

De même pour la Division…

$$72 \div 3 = (\underline{6}0 + 12) \div 3 = 60\div3 + 12\div3 = 20 + 4 = 24$$

Cette propriété est très utile au Calcul mental !

Bien entendu, il est bon de connaître et (ou) réviser ses tables de multiplication, mais avec quelques astuces !

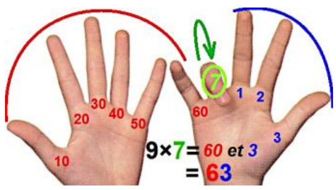
- Enfin Diviser un nombre par un deuxième revient à le Multiplier par l'inverse de ce deuxième nombre

  L'inverse d'un nombre N est un <u>Quotient</u> (soit encore une <u>Fraction</u>) et s'écrit $\frac{1}{N}$ ou 1 / N comme 1÷N

  Ainsi donc N / M = N ÷ M = N × 1/M et remarquons que N / N = N × 1/N = 1 quelque soit N non nul

☺ *Récréation ! Multiplication par 9 avec ses doigts !*

Multiplier un Chiffre par 9 revient à abaisser le doigt du chiffre, en partant de la gauche des deux mains : dès lors, on compte les dizaines à gauche et les Unités à droite ! Explication du tour : Multiplier par 9 revient à multiplier par (10 – 1) …



Astuces et entraînement pour un Calcul mental utile au quotidien

- Tout d'abord, on s'entraîne pour les opérations de bases avec les nombres à un seul chiffre et on n'a aucune honte à utiliser ses dix doigts, bien au contraire !

  Le but est de bien réaliser comment les chiffres se correspondent et se complètent entre eux dans une main - soit autour de 5 - et avec les deux mains comprises – soit autour de 10…

  Ainsi on repère par exemple que 1 est complémentaire de 4 dans 5 soit 1 + 4 = 5 d'où 1 = 5 – 4 ; 4 = 5 –1

  On repère ensuite que par exemple également que 7 est complémentaire de 3 dans 10 soit 3 + 7 = 10,…

  Ce qui servira ensuite pour les additions à 2, puis 3 chiffres etc…

- Addition et Multiplication sont des opérations dites « commutatives » ce qui veut dire que quelque soient les nombres qui s'additionnent ou se multiplient , on peut les permuter au sein de l'opération.*

  Ainsi donc si vous connaissez mieux votre table de multiplication de 3 que celle de 7, le temps de progresser , eh bien 7 × 3 = 3 × 7… Vous n'avez donc plus d'excuse !

  De même 7 × 5 × 8 = 5 × 7 8 = 5 × 8 × 7 = … dans l'ordre qui vous arrange !

- *La soustraction est presque commutative si on s'en tient à deux nombres qui se soustraient :*

  Ainsi M – N = – (N – M) donc lorsqu'on permute les deux nombres, on change le signe du résultat

- La division n'est pas commutative mais nous verrons plus tard comment nous débrouiller avec les divisions…

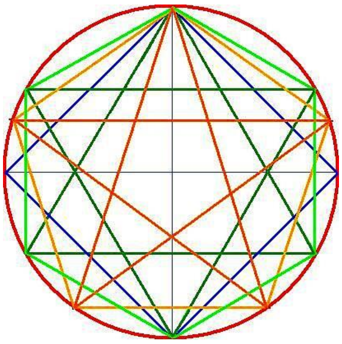
- Il faut ensuite se souvenir et visualiser mentalement l'image d'un Boulier à tiges verticales qui représente tout aussi bien un tableau à colonnes…
- Puisque nous sommes dans un système décimal, la multiplication la plus simple est celle par **10**

  Multiplier un nombre décimal (à virgule) par 10 revient à faire progresser chaque chiffre du nombre vers la colonne immédiatement plus élevée (Unité vers Dizaine, Dizaine vers Centaine…)

  Si le nombre est entier (sans virgule), il suffit alors de rajouter un Zéro après les chiffres
- La division par **10** est rigoureusement inverse puisqu'on inverse le sens de déplacement des chiffres qui constituent le nombre. Si ce dernier est entier, une virgule apparaîtra dès lors après le chiffre des unités.

- Nous avons vu comment la multiplication par **9** n'est pas si compliquée puisque nous pouvons la « distribuer » par (10 – 1), de même, nous nous sortirons aisément de la multiplication par **11** puisqu'on retiendra cette fois ci qu'après la multiplication du nombre par 10, on rajoute à nouveau le nombre au résultat intermédiaire (puisque 1 × le nombre est le nombre lui-même)
- La multiplication par **5** consiste cette fois-ci à réaliser que 5 est la moitié de 10, par conséquent il suffit de multiplier par 10 puis diviser par 2 (diviser par 2 revient à ne garder que la moitié du résultat intermédiaire)
- La multiplication par **3** revient à multiplier par 2 puis rajouter le nombre au résultat intermédiaire…
- La multiplication par **4** revient à multiplier par 2 puis encore par 2 (puisque que *4 = 2 × 2*)
- La multiplication par **6** passe par exemple par une multiplication par 5 à laquelle on rajoute le nombre
- La multiplication par **7** passe par une multiplication par 5 à laquelle on rajoute le double du nombre
- La multiplication par **8** revient à multiplier par 2 trois fois (puisque *8 = 2 × 2 × 2*)

(Bref, on se débrouille petit à petit !)



De la Terre au Ciel et sur Terre

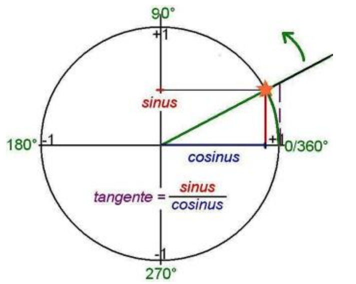
De l'Astrologie à l'Astronomie : des dieux et des hommes

De tout temps, l'Homme a contemplé le Ciel étoilé, la nuit venue. Progressivement, il se mit à imaginer des histoires fabuleuses qui plus tard, fondèrent les premières mythologies nées avec le début des civilisations, en Mésopotamie, Egypte, Inde et Chine.

Les hommes qui commençaient à apprivoiser le cycle des saisons, relièrent la course du Soleil le jour à celle des étoiles au cours de la nuit, regroupées progressivement en constellations par les plus observateurs.

Les *babyloniens*, qui assez rapidement en avaient reconnu 36, en délimitèrent **12**, au sein d'une bande d'espace – qui rejoint la course du Soleil de son coucher au lever suivant – appelée le ***Zodiaque***.
Les astrologues furent chargés d'interpréter la position des astres tant pour prédire le bon devenir des cultures agricoles que le destin des hommes et des souverains.

Afin de parfaire leur science, ils se mirent alors à pratiquer l'Astronomie qui leur permettait de mieux consigner la position des astres et planètes dans le ciel, et dès lors repérèrent celles-ci en latitudes et longitudes à l'aide de mesures angulaires. Ainsi, les *babyloniens*, établirent des almanachs et tables astronomiques de positions d'étoiles et mouvements de planètes et phases de Lune, en s'appuyant sur la Base 60 d'où les **360°** divisés en **60'** de **60"** de **60'"** (minutes, secondes, tierces) qui leur permit d'augmenter la précision.



Les indiens, adeptes de la base **10**, jettent les bases de la trigonométrie, en reliant aux mesures angulaires des tables de sinus et cosinus : leurs valeurs du coup sont comprises entre -1 et 1 par projection de l'arc de Cercle unitaire sur les *hauteurs* et *profondeurs*. *« Trigonométrie » = « mesure des trois angles »*

A force d'observations d'année en année, ou plutôt de générations en générations, voire de siècles en siècles avant notre ère, les savants furent en mesure de parfaire le Calendrier comme de prédire les *éclipses* du Soleil et de La Lune et ainsi de mieux décrire les mouvements périodiques et propriétés de l'Espace autour de la Terre puis… puis sur Terre ; ainsi fut créée une nouvelle discipline : La Géométrie

Les Grecs maîtres mathématiciens

La civilisation grecque à commencer par s'établir d'abord autour de la mer Egée avant la fin du 2nd millénaire puis gagner petit à petit tous les rivages de la Méditerranée pour connaître son apogée au Vème siècle av. J.-C. Cette civilisation nous lègue notamment la Démocratie, la Médecine, La Philosophie et … les Mathématiques.

Les Mathématiques grecques – « Ce qui s'enseigne et qui s'apprend » ont connu leur plus important développement entre le début du VIème siècle avec les figures de Pythagore et Thalès de Milet et le IIIème siècle av. JC. avec Archimède et Eratosthène après Euclide, avant de se poursuivre quelques siècles encore…

A l'époque, les savants se frottaient à plusieurs disciplines à la fois : ainsi Thalès père de la Géométrie pratiquait également l'Astronomie et se préoccupait de la Nature, tout comme Pythagore obnubilé par les Nombres enseignait également à ses élèves l'harmonie et leur donna l'idée d'une Terre sphérique.

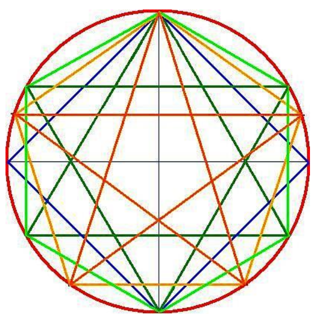
Sphère (La Terre) et Cercle (la Roue) : Tels sont les symboles des figures idéales avec le Tout et l'Un réunis.

Question : quand la roue - le cercle - tourne d'un tour, de quelle distance s'est - elle déplacée en ligne droite ? Précisément : quel rapport entre cette distance parcourue et le diamètre de la roue, c'est à dire en Géométrie, quel rapport entre le périmètre du Cercle et son diamètre ?

Ce rapport dont les anciens (indiens, babyloniens, égyptiens) avaient forcément pris conscience (derrière leurs bêtes de somme qui tiraient la carriole !) s'avérait plus complexe qu'il n'en avait l'air car en fait il est « *transcendant* » puisque ne pouvant être défini par un nombre ou par une fraction de nombres tous simples !

Ce rapport fut désigné par la lettre π (« Pi ») par les Grecs dont Archimède…
Et depuis, beaucoup de mathématiciens ont calculé un nombre toujours plus grand de décimales après la virgule…Ex : 3,1415926535… plutôt que le trop simple 3,14 !
(Car l'écart avec 3,14 utilisé pour 1000 multiplications à la suite - vite atteintes avec les ordinateurs - engendrerait un écart de … 66% par rapport au résultat visé !… Retenir 3.1416 est déjà beaucoup mieux car cela n'entraîne que 0,2% d'erreur au même point)

La méthode très longtemps utilisée pour ce calcul a été l'encadrement par des polygones dont on additionnait la longueur des segments… Archimède approchait déjà la valeur de 3,1416 par l'encadrement suivant : $3 + (10/71) < Pi < 3 + (1/7)$



Nous venons de voir <u>inscrits dans le Cercle</u>, les premiers polygones :

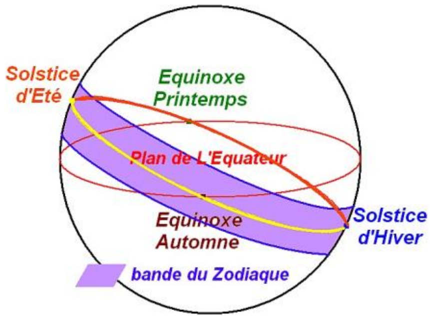
- Le Triangle est le polygone à 3 angles ou 3 côtés – Les angles font chacun 60° - Somme 180°
- Le Carré est le polygone à 4 angles ou 4 côtés – Les angles font chacun 90° - Somme 360°
- Le Pentagone est le polygone à 5 angles ou 5 côtés – Les angles font chacun 108° - Somme 540°
- L'Hexagone est le polygone à 6 angles ou 6 côtés – Les angles font chacun 120° - Somme 720°…

Il se dégage la loi suivante : Les polygones à N côtés ont pour somme de leurs angles : (N – 2) × 180°

☺ Le Cercle qui lui, n'a aucun côté, aurait pourtant une somme angulaire qui tendrait vers l'infini…

Revenons aux hommes qui observent cette fois-ci le Ciel <u>de jour</u> et qui constatent :

- La périodicité des saisons et le mouvement cyclique du Soleil entre son lever et son coucher puis son lever suivant – ce qui va fixer les journées de 24 heures (chez les babyloniens 12 h de jour, 12h de nuit)
- Les 4 saisons qui se succèdent en une période donc d'un an que les romains fixeront à 365 jours ¼
- Les astronomes grecs mesurent l'obliquité du plan de L'Ecliptique par rapport au plan de l'Equateur : 23°½ (de nos jours, mesurée à 23°26'30" environ) et peuvent déterminer plus finement les lieux d'Espace-temps des Equinoxes où le Soleil coupe le Plan de l'équateur et où jour et nuit ont même durée… Mais Hipparque constate au IIème siècle avant JC la « Précession des équinoxes » confirmée par les astronomes arabes un millénaire plus tard…



- Un siècle plus tôt, Aristarque de Samos, tout comme son lointain maître Pythagore, eut l'audace de proposer que la Terre vraisemblablement tournait sur elle-même et autour du Soleil… Sacrilège ! Et alors Ptolémée imposât au IIème siècle après J.C. le Géocentrisme qui perdurera jusqu'à Copernic et Galilée…

Maintenant, nous savons que la Terre tourne autour du Soleil, inclinée sur son axe qui, lui-même, tourne sur un cône ouvert de deux fois 23°27' *en 25 800 ans*, à la manière d'une immense « toupie »

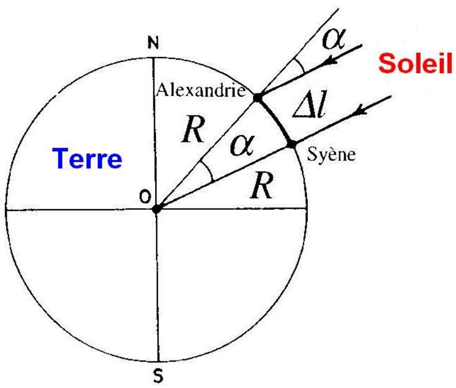
☺ ***Pause*** **: en combien de temps la Terre tourne sur elle-même ?**

Eh non ! Moins de 24 heures pour avoir le temps de s'aligner sur le Soleil une fraction supplémentaire de 24 heures c-à-d (24h / 365,25 jours) donc révolution en 24 h × (1-1/365,25) soit 23h 56min et… 4sec

Le formidable Calcul d'Eratosthène

Eratosthène (-275 à -195 environ) de Cyrène (entre la Libye et l'Egypte actuelle), contemporain d'un autre grec Archimède (-287 à -212 de Syracuse en Sicile), est sans doute un des premiers géographes de l'Antiquité, en plus d'être astronome et, à la fin de sa vie, conservateur de la *Bibliothèque d'Alexandrie*

Puisque son enseignement avait assimilé la rotondité de la Terre assimilée à une Sphère et la présence de tropiques liés à l'obliquité de l'Ecliptique conjuguée aux solstices, il maria Astronomie et Géométrie pour calculer rien moins que la circonférence du globe terrestre !



Ainsi, en Egypte, la ville de **Syène** en Egypte - non loin de l'actuel Assouan - était connue pour abriter un puits dans lequel se reflétait à la verticale le Soleil à son Zénith, au moment du Solstice d'Eté, ce qui situait donc cette ville au Tropique, sinon très proche.

Le même jour, à Alexandrie Eratosthène décida de mesurer de façon assez fine l'ombre du Soleil portée par un Gnomon (pointeau en quelque sorte d'un cadran solaire) et détermina alors un angle avec la verticale qui valait un 50ème de circonférence, soit 7,2°.

D'après l'estimation de voyageurs arpenteurs, il adopta une distance entre Alexandrie de Syène de 5000 stades (mesure égyptienne sur laquelle les historiens se disputent 150 à 180 mètres ?) donc par règle de trois calcula une circonférence de 50 × 5000 stades = 250 000 stades

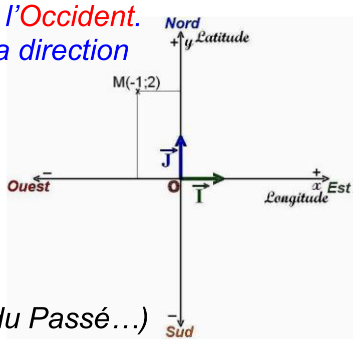
Il est fort probable qu'il ne se soit écarté de la mesure actuelle de 40 000 km environ d'à peine 5% !

☺ ***Pause*** **: quel écart fait-on en s'écartant d'une simple " d'arc, à hauteur de Paris ?**

Recouper avec la définition du Mile nautique qui vaut 1' d'Arc de méridien, à hauteur de Paris (🕬 piège !)…

Sur Terre, savoir s'orienter c'est se fixer un Repère

<u>Préambule</u> : *L'homme est au départ un « nomade », donc un homme qui par nécessité a appris à s'orienter. S'orienter c'est savoir situer l'Orient, c'est à dire le Levant, l'Est où chaque matin le Soleil se lève ; le soir il aura repéré où ce dernier se couche, au Couchant donc, c.à.d. l'Ouest à l'Occident.*



Est et Ouest partagent un même <u>axe</u> <u>perpendiculaire</u> à celui qui se trouve dans la direction des ombres les plus courtes, quand le Soleil est à son zénith et qui indique : dans un sens le Sud et dans l'autre le Nord

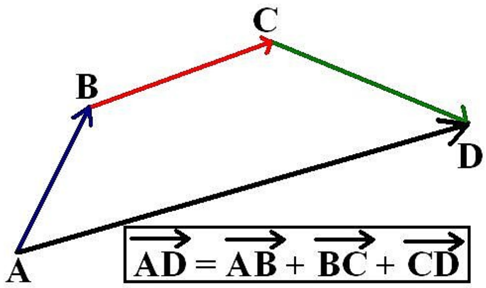
Par la suite, il ajoutera dans son Repère, un <u>troisième axe</u> perpendiculaire aux deux premiers, avec l'Altitude dans un sens et la Profondeur dans l'autre…

- *<u>Deux axes</u> donnent les <u>deux dimensions</u> d'une <u>Surface</u>*
  <u>Trois axes</u> donnent les <u>trois dimensions</u> de… l' <u>Espace</u>

(☺ Et la 4ème dimension ? Le <u>Temps</u> bien sûr, tourné vers le Futur ou provenant du Passé…)

- *« être perpendiculaire » se dit aussi bien en langage mathématique : « être orthogonal » ce qui signifie « posséder un angle droit avec… »*
  Nous avons non seulement représenté ici un repère orthogonal mais également normé, autrement dit le repère est orthonormé ; la <u>norme</u> est le fait de rajouter une <u>règle</u> <u>étalonnée</u> par les flèches respectives qui partent de l'<u>Origine</u> au centre du Repère.
- *Les flèche étalons sont ici des exemples de l'Objet mathématique appelé « vecteur » qui fut inventé à la Renaissance pour venir en aide aux Physiciens et représenter schématiquement des Efforts ou des vitesses et accélérations : Ainsi composer (additionner) par ex des forces revient à composer des vecteurs*

Un vecteur est défini par :
- *Une <u>Direction</u> (tous azimuts)*
- *Un <u>Sens</u> (parmi deux sens opposés)*
- *Une <u>Grandeur</u> (ou valeur ou module)*



Dans l'exemple du Repère ci-dessus nous avions un point M relié à l'Origine en étant associé à son vecteur associé $\overrightarrow{OM} = -1.\vec{I} + 2.\vec{J}$

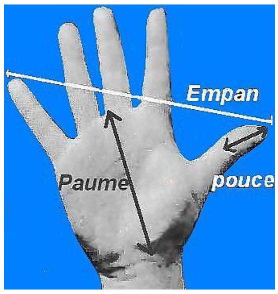
Le schéma ci-contre montre la composition générale des vecteurs :

☺ *Le poids comme vecteur… le Jardinier et son vecteur…*

Des mesures et des hommes et… la Terre

Revenons à l'aube des civilisations… On dit que celles-ci naissent avec l'écriture mais commencent avec le rassemblement des hommes pour se sédentariser dans les villages et pratiquer l'Agriculture et l'élevage.

Elever et garder un troupeau c'est savoir compter : compter les têtes de bétail, compter pour le troc… Cultiver son terrain, c'est savoir en délimiter la surface ou apprécier les distances à parcourir…voire l'écartement des sillons, donc il faut <u>mesurer</u> !

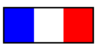


Avec quoi commence t - on ? Avec ce qu'on a sous la main… c'est le cas de le dire : Ainsi, on mesure avec le pouce, la paume, voire la palme (largeur des 4 doigts), on imagine également l'empan entre les 5 doigts écartés

Puis du bout des doigts jusqu'au coude, ce qui donne la coudée…Puis le pied, et après le pas, et après, après… Le stade ou encore la lieue bien plus tard en France…

Mais vu la diversité des hommes, cela devient vite anarchique, donc il faut <u>étalonner</u> : Par des décrets royaux, on en vient à légiférer que le pouce ou la Coudée font "tant", comme le pied également fait "tant".
On adopte à la suite une famille de multiples d'une unité – ou étalon – de base pour fixer un ensemble d'unités dérivées tel que : *1 pas fait 3 pieds de 12 <u>pouces</u> chacun* (cf. 1ère leçon) comme au Royaume-Uni il y a peu …

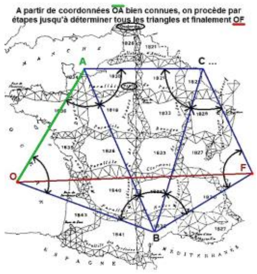
Même si cela remédiait à éliminer une débauches d'unités disparates d'un village à l'autre, on s'aperçut avec le temps et les échanges croissants entre les hommes - voyageurs ou commerçants - que subsistaient encore des différences flagrantes d'une région à l'autre : le mile ne couvrait pas la même distance selon qu'il soit anglais ou italien, la livre ne mesurait pas la même masse partout… D'où des conversions fastidieuses…

C'est donc la Révolution française qui jeta les bases du système  qui allait bientôt devenir universel !

En effet : que partagent les hommes ? Une même Terre ! Donc retour aux sources…

L'invention du système métrique et… du mètre

Les savants français, depuis l'Académie des Sciences fondée en 1666 avaient, par leurs échanges plus fréquents, commencé à diffuser un esprit scientifique qui finit très progressivement à toucher les différentes couches de la Population.



Après de multiples tentatives d'unification avortées, le système métrique dont l'élaboration, au sein de la refonte des poids et mesures, commença quelques années avant la Révolution, fut mis au point après que la mesure de la méridienne de France rende son verdict pour la détermination de l'arc de méridien terrestre.

Cette aventure menée par Delambre et Mechain de 1792 à 1799 entre Dunkerque et Perpignan, en utilisant les méthodes de Géodésie (« maillage de la Terre ») mises au point par l'Abbé Jean Picard au XVIIème siècle et la résolution par Triangulation.

Le mètre fut donc fixé à la 10 000 000-ème partie du ¼ de méridien terrestre et définitivement adopté en 1810
Dès lors, tout s'enchaîne puisque si le mètre est l'unité de base des distances, le mètre carré devient celui des surfaces, le mètre cube celui des volumes, etc…
Associé au gramme ou kilogramme pour les mesures de masse, à la seconde, plus précise que l'heure pour la mesure du temps, le système utilise les multiples ou sous-multiples de 10 (cf. Table multiples – Cours n°1)
Progressivement, le système est adopté par toutes les nations ou presque d'Europe puis dans le monde entier pour devenir le Système International des Unités.

Quelques exemples de Cas concrets de mesures et calculs de Surfaces

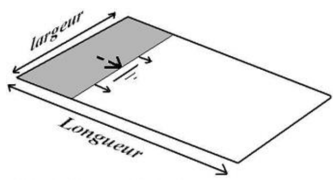
Préambule :

Tout d'abord pourquoi parle t - on de mètres pour une distance et de mètres carrés pour une surface ?
… De kilomètres par heure pour une vitesse ☺ et non pas de *~~kilomètres.heures~~* ☹ ?…

Alors voici la Règle fondamentale : « Les unités se multiplient à leurs valeurs associées » *

(*) *Rappelons que la division équivaut tout aussi bien à la multiplication par l'inverse…*

Ecrire « km = 3000 m » n'aurait aucun sens sans unités associées puisque 3 n'a jamais fait 3000
C'est bien parce que 3 km vaut bien 3 × kilo × m soit que nous égalons 3000 × m



Le balayage de la Longueur par une largeur couvre la Surface

- Ainsi donc la Surface d'un Rectangle de 10 m de Longueur et 4 m de largeur s'écrit :

Surface = (10×m) × (4×m) = (10×4) × (m×m) = 40 × m²
(puisque toute grandeur multipliée par elle-même s'écrit elle-même « au carré »
comme par exemple 3 × 3 = 3² (= 9)

- *De même, toute grandeur multipliée une deuxième fois par elle-même s'écrirait alors « au cube » et cela correspondrait par exemple à un Volume depuis une même longueur de côté : m × m × m = m³)*

comme par exemple 5 × 5 × 5 = 5³ (= 125)

Remarque : Dans l'écriture « qui élève » au carré aussi bien qu'au cube, respectivement « ² » et « ³ », les nombres 2 et 3 font office de *puissance* et correspondent chacun au nombre de dimensions de l'objet.

- Une fois admise la règle fondamentale, les conversions d'unités deviennent plus évidentes et vont de soi :

Exemple : Un Cycliste effectue sur le plat un tour complet de pédalier à la seconde avec un développement de 10 mètres sur le grand braquet. A supposer qu'il tienne la cadence durant une heure, combien aura t-il parcouru de km ? *Autrement dit quelle sera sa vitesse moyenne exprimée en km/h* ?

Posons donc la multiplication : 1 ~~tour~~/sec × 10 m / ~~tour~~ = 10 m/s correspondant à une vitesse instantanée

Ensuite puisqu'il faut faire apparaître les km/h, puisque 1 est l'élément neutre pour les multiplications/divisions, Multiplions 10 m/s par [(km/h) / (km/h)] (ce qui équivaut bien à 10 m/s × 1 = 10 m/s inchangé)

Commutons ensuite 10 m/s × km/km × h/h et regroupons les unités de même grandeur : 10 ~~m~~/~~km~~ × h/s × km/h

Puisque 1 h = 3600 s, il reste 10 × 1/1000 × 3600 ~~s~~/~~s~~ × km/h soit 36000/1000 km/h ce qui fait 36 km par heure

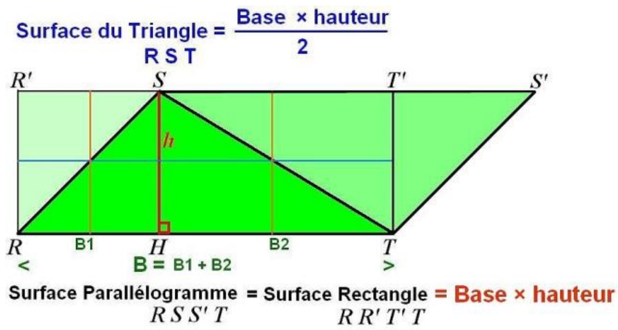
Surfaces diverses : ***Le Triangle pour tout simplifier et tout révéler avec Carrés et Rectangles !***

Le triangle est bien la figure la plus simple à tracer : 3 coups de crayons (ou craies ou bâtons) !
Après lui vient le quadrilatère, figure à 4 côtés, et le Rectangle à condition de disposer d'une équerre,
Sinon, savoir *tracer des cercles* avec un bâton fixe et un autre relié au premier par une corde est très utile…

Le principe final du Calcul d'une surface quelconque est de la découper en surfaces plus simples à calculer, et en additionner le tout…

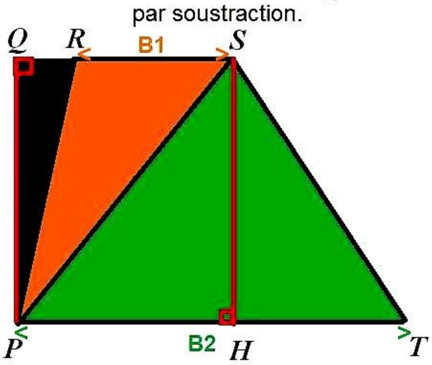
Le principe associé est de faire émerger une « hauteur » à partir d'un côté et qui rejoint un sommet opposé à ce côté : la hauteur fera toujours un angle droit, ce qui permet de retrouver la surface d'un rectangle et d'en déduire la surface du triangle :

Surface du Triangle = ½ Surface du Rectangle « autour »

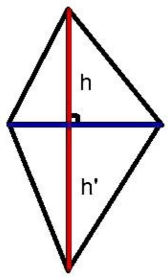


Remarque :

Dans certains cas on recherchera une hauteur commune, procéder également par soustraction.

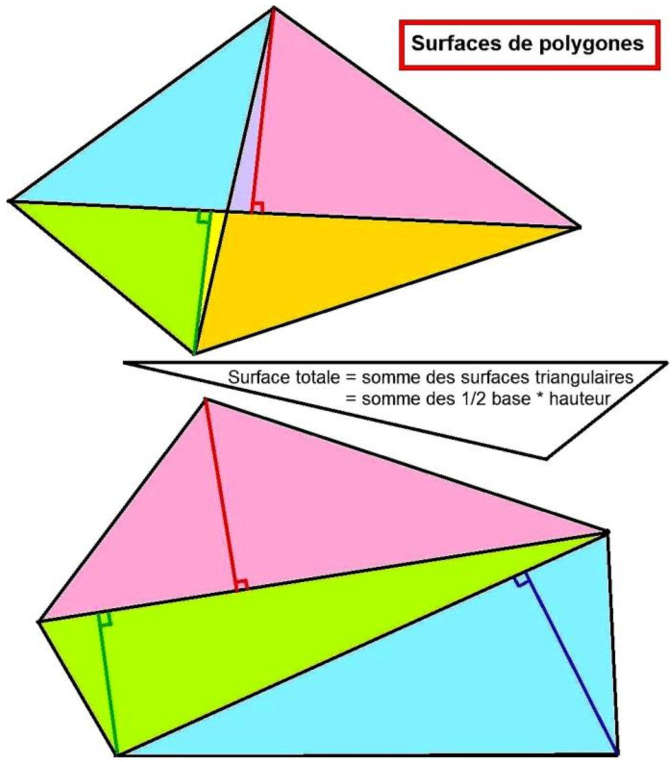


Ici, dans ce cas on retrouvera la formule du Trapèze : 1/2 (B1+B2) * hauteur



du "Losange" : 1/2 D1 * D2
avec D1 = hauteurs h + h'

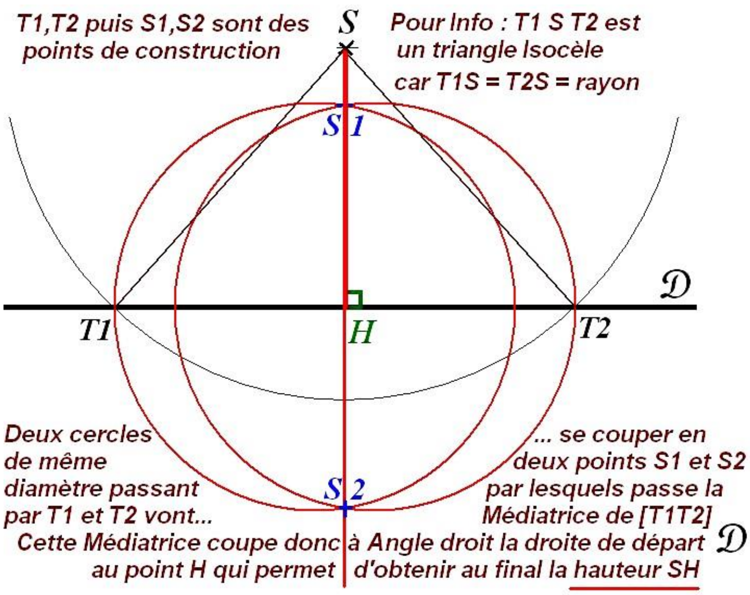
Imaginez que nous soyons en Egypte ou Moyen-Orient… Voilà comment on procédait déjà…
Avec cordes à nœuds, pieux et Equerres pour mesurer les terrains et calculer leurs surfaces



- Et si nous ne disposons pas d'Equerres ?

Comment fait - on pour obtenir des hauteurs, et plus généralement des perpendiculaires qui font donc un angle droit avec la droite de départ ?

On s'aide de la figure fondamentale, à savoir le Cercle !



Principe :

De même que tout point peut-être considéré comme « Intersection » de deux droites, cela reste vrai également avec cette fois-ci deux Cercles

L'avantage avec deux Cercles, c'est que les points aux intersections se trouvent à une distance connue de chaque centre de Cercle : le Rayon !

D'où un meilleur repérage…

Voilà donc comment procédaient il y a déjà trois bons mille ans (!) les arpenteurs égyptiens et babyloniens ; et leurs savants ont su même approcher le calcul de la Surface du Disque bien avant Archimède : $\boxed{22/7(\pi) \times R^2}$

Retrouver et comprendre les théorèmes de Pythagore et Thalès et ce qu'ils nous révèlent

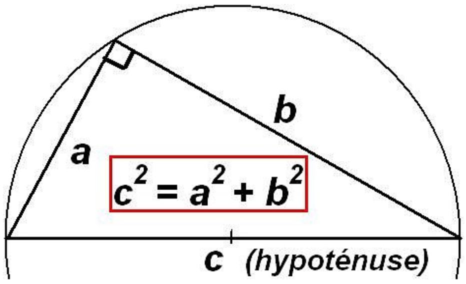
Nous avons un jour ou l'autre entendu parler de ce fameux Théorème dit de Pythagore :

« Le Carré de l'Hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés adjacents »

Certes, mais n'oublions pas de préciser que l'on parle d'un Triangle rectangle, à angle droit donc, sinon l'égalité n'est pas vérifiée ; inversement s'il y a égalité, c'est bien que le triangle est rectangle.

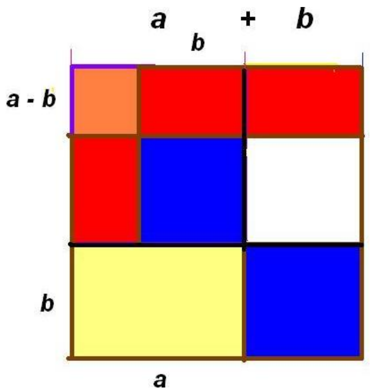
Pour info, tout Triangle inscrit dans un Cercle, et dont le grand côté se confond avec le Diamètre de celui-ci est … rectangle.

Merci Archimède !



- Mais c'est quoi au juste une égalité de carrés ? Autrement dit, qu'a t - on mesuré ?

  Des longueurs ? Regardez la figure : le diamètre de longueur « c » n'est pas élastique au point de recouvrir la longueur de « a » et « b » réunis ! Alors ?



Alors, faisons un petit détour pour comprendre …

Nous avons également du apprendre dans notre jeunesse, (au collège !) les « identités remarquables » du genre :

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ *que nous allons récrire …*

$(a + b)^2$ c'est $(a + b) \times (a + b)$ par distribution c'est bien…

$a \times a + \boxed{a \times b + b \times a} + b \times b$

a^2 c'est $a \times a$; ab c'est $a \times b = b \times a$; b^2 c'est $b \times b$ par conséquent :

Nous avons bien là affaire à des calculs de… Surface ! Nous additionnons bien dans cette égalité des surfaces carrées et des surfaces rectangulaires !

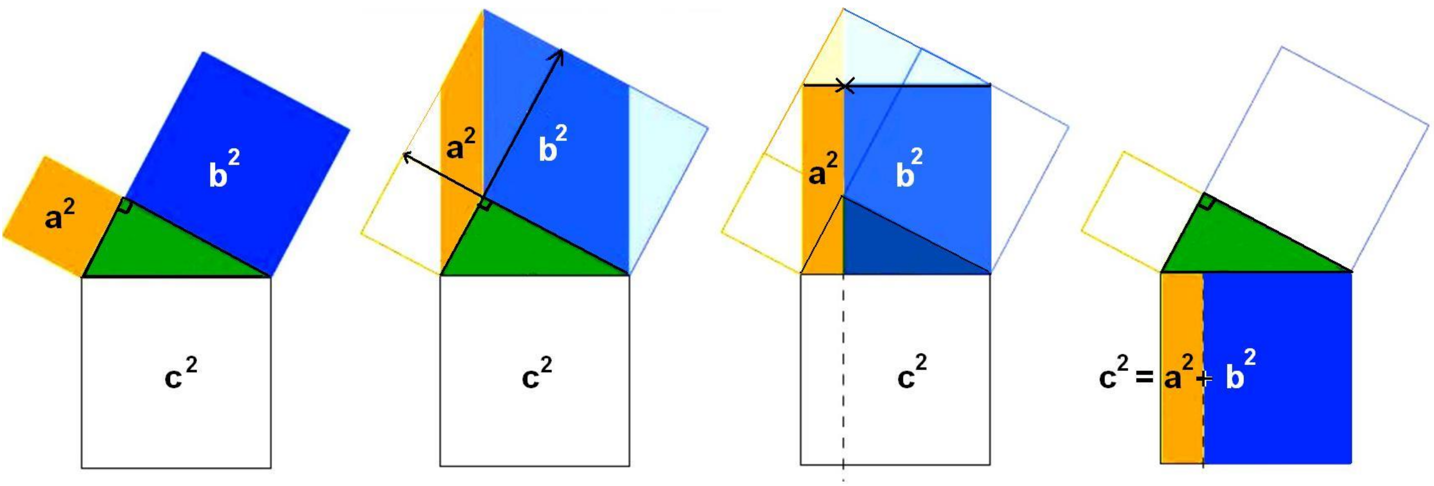
Et de même pour $(a – b)^2 = a^2 + b^2 – 2ab$

ainsi que pour $(a + b) (a – b)$ *ce qui veut bien s'écrire* $(a + b) \times (a – b)$

Aussi, revenons à notre Théorème de Pythagore : l'égalité « $a^2 + b^2 = c^2$ » est bien une égalité de Surfaces

Et ces surfaces sont carrées à la base…

Démonstration par l'image !



Nous avons juste exploité que les Carrés sont des rectangles particuliers qui vont occuper la même surface que des parallélogrammes qui ont en commun la même base et la même hauteur : Par conséquent

1) Nous dessinons les Carrés issus du Triangle Rectangle
2) les carrés issus des côtés adjacents se transforment en parallélogrammes de même surface
3) Les parallélogrammes se transforment à leur tour en rectangles de même surface avec hauteur identique
4) Les rectangles s'avèrent, à la suite de la construction, posséder une longueur identique égale à « c » et voient leur hauteur respective se compléter pour faire également « c » par addition : donc la somme de ces deux rectangles fait au final « c » × « c » soit c^2 surface du Carré issu de l'« hypoténuse »

Amen !

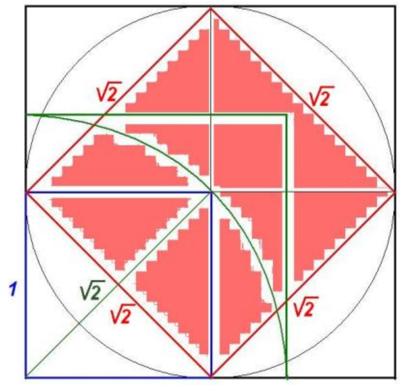
Parlons une dernière fois de Pythagore …

Pythagore, nous l'avons dit, ne jurait que par les nombres au point de résumer le Monde à une logique de chiffres tout autant symboliques les uns que les autres, et qui puissent se conjuguer en multiples ou fractions pour former l'ensemble des nombres « rationnels »

Or, en exploitant les deux triangles rectangles contenus dans un Carré, figure parfaite à ses yeux, il eut la profonde surprise de constater que la Diagonale du Carré ne pouvait exprimer un rapport parfait avec son côté

Consolation : Pythagore venait de réaliser l'existence de nombres – certes « irrationnels » – mais qu'on appelle désormais « transcendants » tel le nombre π idéalisé, lui, par Archimède trois siècles plus tard…

4 moitiés de Carré-unité donne un Carré double



La Diagonale du Carré-unité génère le Carré double

Cette découverte était bien égale au brave paysan d'Egypte qui, après des générations de père en fils s'était arraché les cheveux pour comprendre comment labourer une surface tout juste double de son terrain et non pas à faire le quadruple de boulot… Avant de comprendre enfin quelle astuce allait lui donner la solution !…

Comprendre que $\boxed{\sqrt{2}}$ est le côté qui génère la Surface carrée égale à 2

- Puisque on écrit que 2 est le « carré » de $\boxed{\sqrt{2}}$, soit $\boxed{\sqrt{2}}^2 = 2$

  On peut écrire inversement que $\boxed{\sqrt{2}} = 2^{1/2}$… *Puissance d'écriture !*

☺ Récréation : Savez-vous pas qu'avec votre feuille de papier A4, vous faites du « Pythagore » !? … Mais si ! Votre feuille A4 est 4×4 (=16 !) fois plus petite en Surface qu'une feuille A0 de la famille (A0, A1, A2, …) qui ont toutes le rapport $\boxed{\sqrt{2}}$…entre leurs côtés !

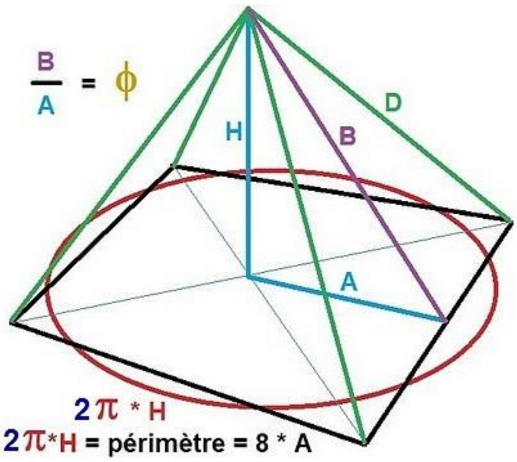
☺ Les arpenteurs égyptiens avaient une corde à 12 nœuds, pourquoi ? Angle droit grâce à $\underline{3}^2+\underline{4}^2 = \underline{5}^2$!

<u>Epilogue ou plutôt prologue (!) égyptien</u> :

Tout de même, comment se fait-il que notre brave paysan soit resté, après tant de générations, dans l'ignorance du savoir des architectes (et géomètres sans doute) qui conçurent la Pyramide de Khéops, pourtant construite 2700 ans avant J.C. !

Dimensions à l'origine : Base de 440 coudées de côté et hauteur de 280 coudées !

Tiens donc ! Le périmètre de la Base carrée devait faire 4 × 440 soit 1760 coudées qui fait alors un rapport de 44/7 avec la hauteur … soit 2 × 22/7… Cela ne vous rappelle rien ? 2 × Pi □ !



Pyramide vue de côté, la hauteur s'abaissant du Sommet coupe la base en deux pour dessiner deux triangles rectangles jumeaux qui adoptent le côté oblique comme… hypoténuse.

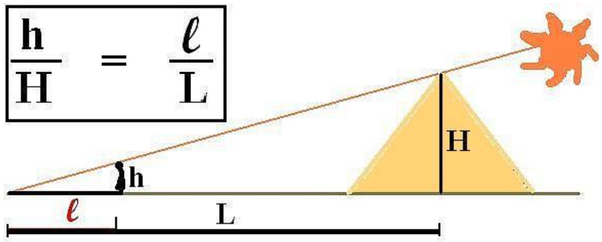
Il faut croire qu'ils avaient sacrément le Compas dans l'œil car entre cette hypoténuse et la ½ base existe un rapport très proche d'un nombre encore transcendant appelé « le Nombre d'Or »… ~ 1,618…

Ce rapport peut justement se retrouver en appliquant le Théorème de Pythagore… « inventé » deux millénaires plus tard !

- On attribue désormais à la Coudée égyptienne, vieille de cinq millénaires la valeur de 0,5236 m environ
- ϕ « le Nombre d'Or » vérifie par sa définition $\phi^2 = \phi + 1$ ce qui donne $\phi \sim 1{,}618$… et donc $\phi^2 \sim 2{,}618$…

Rappelez-vous que 3,1416 était une bonne approximation au temps d'Archimède pour le nombre π

Et bien comme c'est drôle ! : $\boxed{\pi - \phi^2 \sim 0{,}5236}$ <u>valeur</u> de la coudée égyptienne !…



Voici donc Thalès (-625 à -547 environ) de Milet, non loin de Samos où naquit Pythagore, qui arrive en Egypte au VI^{ème} siècle avant JC., donc deux millénaires plus tard pour mesurer la hauteur de la Pyramide… Comment s'y prend il ? En observant son ombre et celle des 3 Pyramides de Gizeh au même moment, il constate et devine que les ombres au sol sont proportionnelles à la hauteur des Etres ou Objets éclairés par le Soleil (le Dieu égyptien !) aux rayons obliques

Par conséquent, il en déduit que dans un triangle ainsi formé le rapport des hauteurs vaut le rapport des côtés adjacents C'est ça le Théorème Thalès : simple et génial !

Epilogue : une audacieuse application vécue du Théorème de Thalès

Ma première expérience de professeur en lycées professionnels remonte à fin 1999, où je fus remplaçant de Maths-Physique au lycée polyvalent de Porcheville avec 3 classes de BEP durant 4 mois.

Un après-midi alors que je débutais un cours avec 7-8 élèves, on vient frapper à notre porte pour demander aux élèves de "se mettre en tenue" pour une démonstration de "terrassement" dans la cour du lycée, lors de la visite "surprise" du préfet. J'accompagnais donc mes élèves, au dehors.

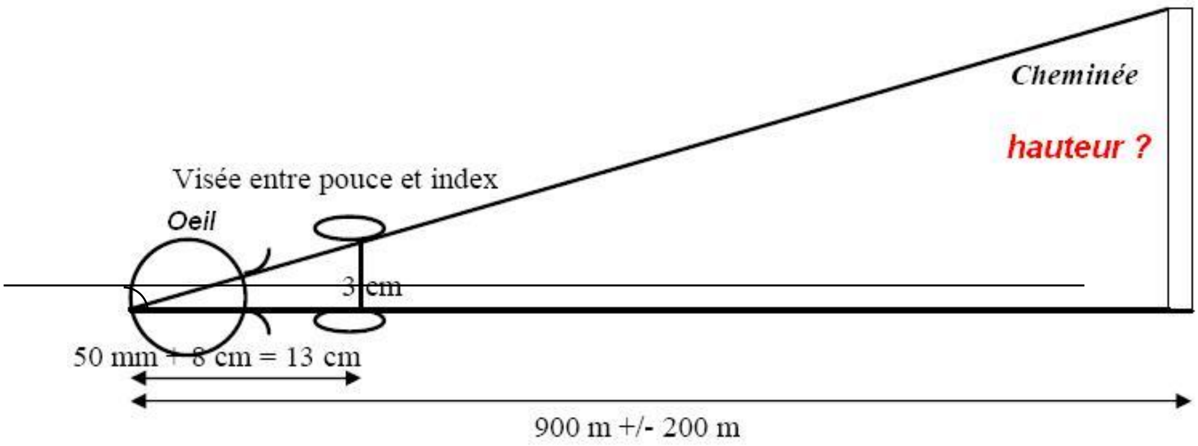
Pendant que nous attendions, eux "avec la pelle et la pioche", et moi à leur côté, nous avisâmes les hautes cheminées de la Centrale EDF qui semblaient situées juste derrière la haie - apparence trompeuse puisque la centrale se situe en bord de Seine, en face de l'autoroute A13, entre Poissy et Mantes la Jolie.

- *M'sieur ! Elles font quelle hauteur les tours ? 50 m ? Plus ?*

Je ne savais trop quoi dire, au moment où j'observe un élève qui visait les cheminées de son œil, tout en cherchant à les circonscrire entre le pouce et l'index.

- Continues de viser ! lui dis-je... Je relève les mesures que tu prends par rapport à tes doigts et ton œil... Vous allez enfin comprendre à quoi sert le "***Théorème de Thalès***" ... – *Vite, M'sieur, On nous regarde...*

De retour dans notre classe, je trace le schéma suivant, *complété ensuite après sondage et estimations…*



Voici donc le rapport que nous cherchions (du « pur » « Thalès » !)

(écartement des doigts) sur (distance à l'œil corrigée) = (hauteur cheminées) sur (distance Lycée - Centrale)

Rq : l'image va sur la rétine, je suppose rajouter 50 mm (équivalent focale) aux 8 cm, soit 13 cm en tout.

Forcément sur les 7 élèves, pour la distance à l'EDF on me répondit pour commencer entre 300 m et 3 km.
Enfin, leur dis-je, quand vous y allez à pied pour vous balader, vous mettez combien de temps?
- 1/4 d'heure... même pas, 10 mn ! - Bon, même si vous stoppez à la grille, à la louche cela fait 1 km maxi...

Et donc d'estimer à nouveau avec plus de « jugeotte » et trouver une moyenne de 800 m à 200 m près.

- Attendez, sur la Carte « Michelin », à l'échelle… 1 cm cela fait quand même 1 km à vol d'oiseau...
Bon alors la hauteur fait... règle de trois : 3 cm / 13 cm x 1 km = ... 230 m ! Hou la vache !
- *Et si on prend 900 m ?* – Ben… 10% de moins : 210 m… - *Pas possible M'sieur, dépassent pas les 100 m !..*
- De toutes façons, faut estimer l'erreur qu'on peut faire : 25% sur la distance, 10 à 15% sur les distances à l'œil et entre les doigts... Bon, sans forcément toutes les cumuler, ça fait bien du 33% d'erreur (un tiers quoi !)

Donc **210 - 230 m** disons **220 m** -33% ça fait 150 m, plus 33% ça fait 300 m en gros...

Donc, notre calcul n'est pas faux si en vrai, la hauteur des cheminées est comprise entre 150 et 300 m…

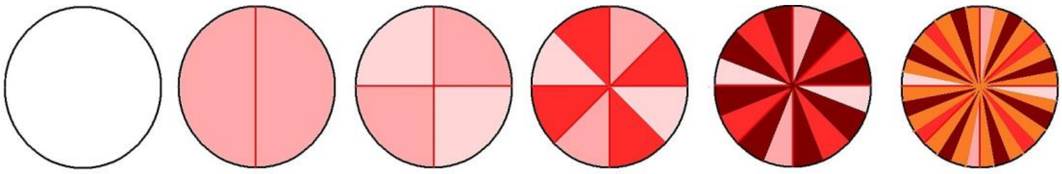
Je fus à moitié étonné de découvrir que personne parmi les autres profs ne connaissait la réponse...
Donc le lendemain, je me rendis à la centrale, et là je tombai sur le gardien au portail, tout heureux d'avoir de la visite…Une « éternité » qu'il n'avait vu d'autre prof auparavant...Et me voilà avec tout un tas de brochures !

Pourvu que les cheminées fassent au moins 150 m de haut, car sinon « mon Thalès » est dans les choux…
Enfin, je vis…Je dus cependant attendre le lendemain pour revoir mes élèves, les soi-disant « les plus nuls » du Lycée et leur montrer la brochure EDF – M'sieur, Ils parlent pas des cheminées...- Mais si, en bas à droite..

- ! ... ! ... Non !... : **Hauteur des cheminées : 220 mètres** ! *Silence...*

Et moi assez ému de leur dire : « On est Bons hein les gars ! » - On a fait ça avec deux doigts et juste l'œil... ?
- Oui, rappelez-vous-en ! Ce que vous avez été capables de faire... seuls, sans aucun "matos"…

Juste avec deux doigts et deux opérations de calcul !



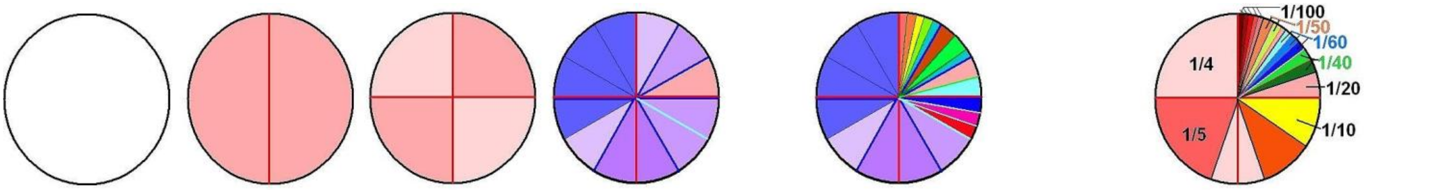
Parts, Partages et Répartitions

Un Calcul des Fractions pas plus compliqué qu'un partage de gâteau

Fractionner, c'est Diviser… Diviser est aussi Partager, et pour que le Partage soit « juste » il faut bien que les parts soient égales… Car le résultat d'une division qui tombe juste est bien une valeur unique à la fin…

Faire des parts plus petites, c'est enchaîner les Fractions… Multiplier les divisions…Vous suivez toujours ?
(Si, si, on se rappelle que multiplications et Divisions sont deux opérations qui s'accordent bien ensemble)

Zut ! Les parts découpées, comment faire des parts plus grosses ? Pardi ! En réunissant des petites parts…
A quoi comparer (une part + une part plus grosse) ? A la réunion des fractions communes à ces deux parts…
Là, je sens que vous décrochez… Vite ! Un Gâteau !



1 = 1/1 = 1

1/2 = 1/2
1/2 + 1/2 = 2/2 = 1

1/2 × 1/2 = 1/4
1/4+1/4 = 2/4 = 1/2

1/3 × 1/4 = 1/12
1/12+1/12 = 2/12 = 1/6
1/12+1/12+1/12 = 3/12 = 1/4
... 4/12 = 1/3
... 6/12 = 1/2

1/5 × 1/12 = 1/60
2/60 = 1/30 ; 2/30 = 1/15
1/15 + 1/60 = 5/60 = 1/12
1/2 × 1/12 = 1/24
1/3 × 1/12 = 1/36

1/100 = 1/10×1/5×1/2 = 1/5×1/4×1/5
2/100 = 1/50 ; 5/100 = 1/20 ; 1/3×1/20 = 1/60
...1/2 × 1/20 = 1/40 ... Donc :
5/100+(2/50+1/100)+3/60+2/40+1/20 = 5/20
= 1/4

- Comment trouver les fractions communes à des parts de taille différente, c.à.d à des fractions différentes ?

Par exemple comment additionner les fractions 1/4 ; 1/5 ; 1/6 ?
En recherchant les *plus petits communs multiples* (PPCM) des diviseurs et la Fraction commune obtenue (forcément une part plus petite) s'avère être du coup un *plus grand commun diviseur* (PGCD) du… Gâteau !
La Fraction commune est donc ramenée ici dans cet exemple à 1/60

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2\times2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2\times3} = \frac{3\times5 + 2\times2\times3 + 2\times5}{2\times2\times3\times5 = 60} = \frac{37}{60}$$

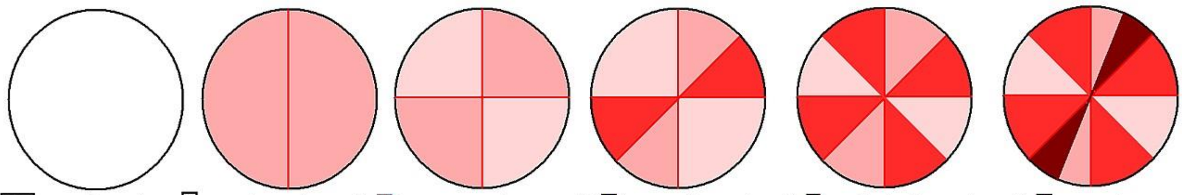
- Nous notons qu'une fraction générale se compose d'un Numérateur N et Dénominateur D et s'écrit N/D
- L'inverse d'un nombre (fraction aussi bien) échange le Numérateur avec le Dénominateur : inv(N/D) = D/N

(Rappel : N peut s'écrire N/1 (puisque 1 est l'élément neutre de × ou / ÷) et donc inv(N) = 1/N)

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse

Observons la différence de partage ci-dessous et retirons en différentes lois :

1ère séquence : chaque coup de couteau partage en deux la portion traversée en deux parts égales...



Nul coup de couteau; 1 = 1/1 = 1 ; $1/2^0 = 1$

1 coup de couteau... 1÷2 = 1/2 ; 2×1/2 = 2/2 = 1 ; $1/2^1 = 1/2$

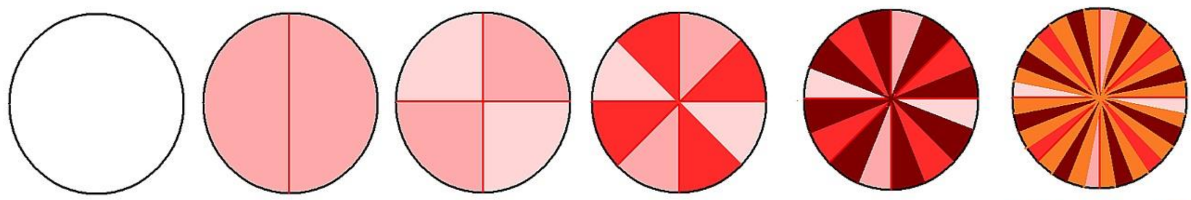
Un 2ème coup en travers... 1/2 ÷ 2 = 1/(2×2) = 1/4 ; 4×1/4 = 4/4 = 1 ; part moyenne : (4parts) 1/2 × 1/2 = 1/4

Un 3ème en diagonale... 2×1/4 + 4×1/8 = 2/4 + 4/8 = 1/2+1/2 = 1 ; part moyenne : (6parts) 1/3 × 1/2 = 1/6

Un 4ème 2nde diagonale... 8×1/8 = 1 ; part moyenne : (8parts) 1/4 × 1/2 = 1/8

Un 5ème en travers... 6×1/8 + 4×1/16 = 6/8+4/16 = 3/4+1/4 = 1 ; part moyenne : (10parts) 1/5 × 1/2 = 1/10

2nde séquence : d'une fois à la suivante, chaque part précédente est partagée en deux



1 = 1/1 = 1 ; $1/2^0 = 1$

1÷2 = 1/2 ; 2×1/2 = 2/2 = 1 ; $1/2^1 = 1/2$

1÷2÷2 = 1/(2×2) = 1/4 ; 4×1/4 = 4/4 = 1 ; part modèle : $(1/2)^2 = 1/2^2 = 1/4$

1÷2÷2÷2 = 1/(2×2×2) ; 8×1/8 = 1 ; part modèle : $(1/2)^3 = 1/2^3 = 1/8$

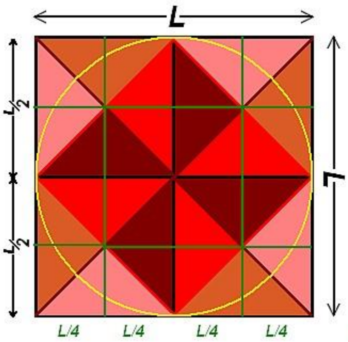
1÷2 quatre fois = 1/16 ; 16×1/16 = 1 ; part modèle : $(1/2)^4 = 1/2^4 = 1/16$

1÷2 cinq fois = 1/32 ; 32×1/32 = 1 ; part modèle : $(1/2)^5 = 1/2^5 = 1/32$

Au lieu de se partager un gâteau circulaire, faisons de même avec un autre… carré !

Nous allons voir que cela nous ouvre également bien des perspectives…

Partage d'un Carré



Un Carré est ici divisé en 4 (Une croix grecque verticale/horizontale) puis à nouveau en 4 (Une croix de St André à 2 diagonales) de façon à obtenir de prime abord 4×4 soit 16 triangles rectangles

Info : ce Carré a pour côté L et sa Surface est donc L×L soit $\boxed{L^2}$

Question : quelle est la surface de chaque triangle rectangle ?
Facile : la Surface initiale divisée par 16 soit $S_T = L^2/16$

plus subtil : quelle est la longueur des côtés de chaque petit triangle ?
Rép : puisque la Diagonale du grand Carré fait $\sqrt{2} \times L$, on partage en 4 et on obtient… $\frac{\sqrt{2}}{4} \times L$ pour les petits côtés et pour les plus grands (les bases) simplement $L/2$

rappel de la surface d'un triangle : $\boxed{1/2 \times \text{base} \times \text{hauteur}}$ soit $1/2 \times L/2 \times \ldots L/4$ ("merci Thalès") donc bien au final $1/4 \times L \times 1/4 \times L$ soit $L^2/16$

Mais au fait ! A bien y regarder, ces triangles ne sont-ils pas des moitiés de carrés ?
Ces carrés ("penchés") ont pour côté $\frac{\sqrt{2}}{4} \times L$ et pour surface $\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \times L\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{4} \times L \times L$ soit $\frac{2 \times L^2}{16}$
Donc, on retouve bien que les triangles aux demi-surfaces couvrent bien chacun $L^2/16$
Rebelote ! Ne vient-on pas de découvrir que la surface d'un triangle $\boxed{\text{rectangle}}$ est aussi le $\boxed{\text{demi-produit de ses petits côtés}}$ (en fait, la demi-surface du rectangle"penché") ?

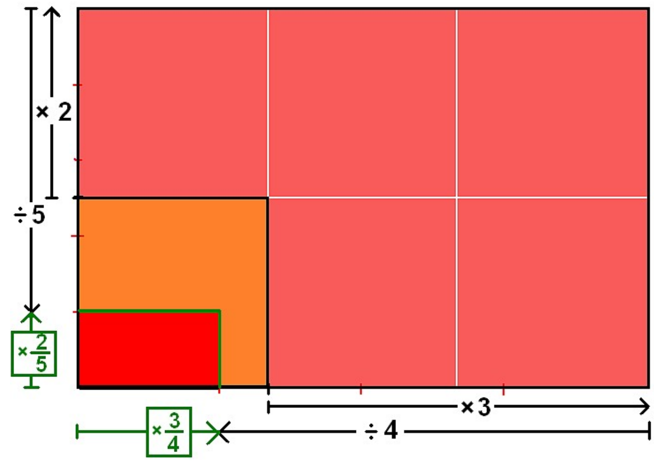
Moralité : le Partage …
… nous enrichit !

Remarque importante donc : Diviser ou Fractionner, c'est partager en parts égales
puisque N parts occupent chacune 1/N (l'inverse de N) de la surface…
(ou plus généralement de la « grandeur ») initiale …

☺ *Bien entendu, certains ont une conception différente du partage…*

Multiplication de Fractions simple comme bonjour et Division complice…

La multiplication s'obtient directement en multipliant d'un côté Numérateurs et de l'autre Dénominateurs, *au contraire de l'Addition ou Soustraction qui nécessite d'abord (revoir 1ère page) un Dénominateur commun*



Signification d'une multiplication (produit) de deux fractions qui donne : $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}$

Autrement dit, comment passe t-on du Carré-Unité au Rectangle résultat ?

Ici, par exemple, " 3/4 × 2/5 " est bien égal à un rectangle de 3 × 2 soit 6 unités de surface réduit 4 fois sur la longueur et 5 fois sur la hauteur soit en tout 4×5 = 20 fois en surface

On a bien $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$ simplifié en $\frac{3 \cancel{\times 2}}{10 \cancel{\times 2}}$

Autrement dit, le rectangle résultat occupe $\frac{3}{10}$ de la surface du Carré-Unité de départ.

- La Division par une fraction, rappelons-le, revient à multiplier par l'inverse de cette fraction, autrement dit :

A / (N/D) = A × (D/N)…

Exemple : 5 / (5/4) revient à écrire 5 × (4/5) = 4 *(ici simplification par 5)*

- Comment faire rapidement de tête « 2/3 de 3/4 » (Autrement dit la multiplication 2/3 × 3/4) ?

Se représenter le Gâteau partagé d'abord en quarts dont il reste 3 portions et finalement n'en prendre que deux sur les trois, c'est donc bien la moitié du gâteau que l'on obtient ((2×3) / (3×4) simplifié en 2/4 = 1/2).

- Pourquoi Diviser par une petite fraction (de valeur inférieure à Un) donne t-il un résultat plus grand à l'arrivée qu'au départ ? Puisqu'on vous dit que cela revient à multiplier par l'inverse qui est, lui, plus grand que l'unité, donc au final un résultat plus élevé…

  On peut aussi s'imaginer un certain « magot » transvasé dans des petites bourses, donc plus nombreuses

  ☺ **Moralité : Si vous voulez vous sentir « riche », adoptez de petits porte-monnaie…**

Jonglez avec les pourcentages… sans se les prendre sur la tête !

Un pourcentage, avons nous vu en 1ère page, n'est rien d'autre qu'une fraction de dénominateur égal à 100

Aussi, faire des calculs de pourcentage n'est pas plus difficile – *voire est même plus facile car 100 est rond !* – qu'un calcul de fractions où il s'avère, encore une fois ici, que multiplication comme division sont plus simples qu'addition ou soustraction…

D'ailleurs combien de fois assiste t-on à des gags y compris produits par les grands de ce monde ? …

- Donc, l'expression « tant de % d'une grandeur » revient à multiplier cette grandeur par « tant de % »

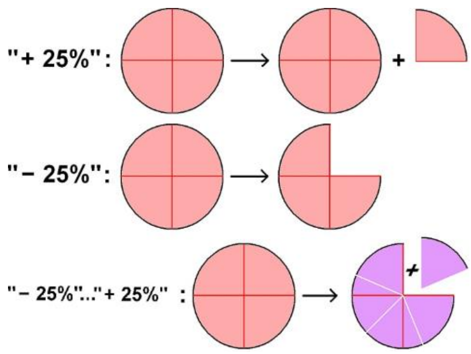
  Exemple : 25 % d'une certaine somme revient à multiplier la somme par 25% (c.à.d. par 25/100 =1/4)

  Autrement dit, dans ce cas, cela revient à diviser par l'inverse de ¼ qui n'est autre que 4

- Là où ça se gâte pour certain(e)s, c'est lorsqu'on aborde l'expression « plus ou moins tant de % »

  Alors « tant de % de quoi ? » doit-on se dire… De la grandeur de départ, ce qui fixe déjà les idées (!)

  La grandeur de départ peut-être toujours ramenée à … 100% et par conséquent vous rajoutez ou enlevez les « tant de % » à ces … 100%.



« + 25 % » revient à multiplier votre somme initiale par (100% + 25%) donc par (125% = 5/4 = 1,25)

« – 25 % » revient à multiplier votre somme initiale par (100% – 25%) donc par (75% = 3/4 = 0,75)

☹ *Si on vous demande de baisser votre salaire de 25% pour vous promettre de les relever de 25% dès que possible, il y a double arnaque ! : la plus grossière est que 3/4 (-25%) × 5/4 (+25%) n'a jamais fait 100% mais bien 15/16 – il vous manquera 1/16 en absolu (6,25%) – et entre-temps les prix auront augmenté…*

Petits calculs de pourcentages pour prendre un certain recul sur la Société…

Une fois qu'on faisait remarquer à une personne la richesse de certains oligarches, celle-ci tint à relativiser les propos du journaliste en lui soumettant la définition d'une personne vraiment « très riche » :

« pouvoir vivre avec les intérêts des intérêts de son capital »

Prenons donc cette personne au mot et posons quelques repères au préalable :

- Un capital qui rapporte est essentiellement financier, ne comptons donc pas les demeures et châteaux…
- Vivre « confortablement » sans extravagances est d'après consensus estimé à 50 000 € net d'impôts
- Une famille type – 2 parents et 2 enfants – est considérée par les Statistiques nationales comme 2,5 parts

  (L'ajustement en parts fiscales provient du fait que les frais généraux sont partagés à plusieurs ; ainsi il est estimé que deux adultes ensemble ne dépensent que 1,5 à 1,66 fois maximum la dépense du célibataire)
- Les intérêts – ce que rapportent les placements ou capitaux – seront comptés net de tous impôts…

- Le Taux d'intérêt est un rapport – fraction donc – entre les intérêts (ici nets d'impôts, charges) et le Capital. A combien allons- nous l'estimer ? Croyez-vous que les très riches se contentent d'un 0,75% de Livret A ?

  Il faut donc dégager un taux vraisemblable ; de fait il s'agit d'appliquer cette règle méconnue mais simple : La moyenne entre deux valeurs extrêmes constatées est une moyenne géométrique et non pas algébrique

  Exemple : *Entre une montre de facture exceptionnelle pouvant valoir jusqu'à 100 000 € et une montre « jetable » à 1 €, quel prix faut-il mettre pour disposer d'une « bonne montre » qui fera « bon usage »… ?*

  La moitié de 1€ + 100 000 € soit ~50 000 € ? Bien sûr que Non ! Mais $\boxed{\sqrt{1\times 100\,000}}$ qui vaut environ 300 €

  ☝ *la montre chrono de plongée que j'ai au poignet depuis vingt cinq ans vaut désormais 250 €…*

  Ainsi, entre un médiocre 0,50% annuel (un Livret B imposé) et un 100% (certains doublent leur fortune tous les ans) la moyenne serait de $\boxed{\sqrt{0{,}50\times 100}}$ soit $\boxed{\sqrt{50}}$ soit environ 7%… Gardons 5% annuel net d'impôts

Passons donc au calcul…

La famille (avec 6 enfants, la grand-mère ?) de ce très riche « vivra » avec 4 parts de 50 000 soit 200 000 €/an

Ces 200 000 € correspondent à 5% d'intérêts nets, donc 100% vaut inversement 20 fois plus (100% ÷ 5%)

Soit 20 × 200 000 = 4 000 000 € pour produire ces intérêts… Recommençons l'opération une seconde fois puisqu'il faut vivre avec les « intérêts des intérêts » … 20 × 4 000 000 € = $\boxed{80\ 000\ 000\ €}$.

Voici donc calculée, estimée la fortune d'une grande famille dixit « très riche »à 80 millions d'euros actuels

Ces 80 millions d'Euros peuvent correspondre à 50 millions de nouveaux francs au début des années 60, en conservant le pouvoir d'achat de la monnaie (donc inflation cumulée, depuis bientôt 60 ans, déduite)…

Or à cette époque, on parlait de « milliardaires » mais en centimes pour désigner les personnes très riches, soit 10 millions de NF... Donc 50 millions de NF pour une grande famille respecte bien l'ordre de grandeur…

Mais voilà, à notre époque des « requins » de la Finance, du monde « ultralibéral », la somme calculée précédemment est largement « enfoncée » puisque ce n'est pas 80 millions d'euros dont disposent les plus riches de la planète, mais plutôt 80… milliards d'Euros ou Dollars, soit un facteur 1000 plus élevé ! ! !

Alors quoi, ils pourraient se contenter de vivre avec les intérêts des intérêts des intérêts de leur Capital ?

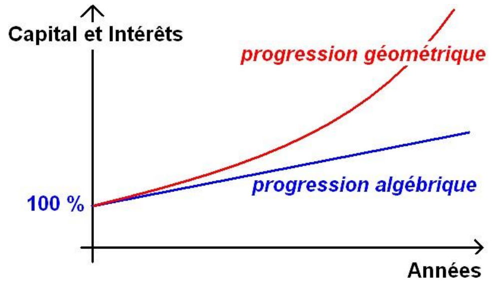
Plus que ça voyons, puisqu'il faut au moins 20x20 = 400 pour s'en rapprocher… donc ils peuvent se contenter des intérêts 1 des intérêts 2 des intérêts 3 des intérêts 4, voire bientôt 5… ?? *Non mais arrêtez l'Orgie !…*

- *Certes, en avance sur le cours « des chiffres et des Stats »,* mais juste pour illustrer ce que signifie une progression géométrique à l'aide d'un simple taux exprimé en % :

  Chaque année, un Capital produit des intérêts selon un taux qui exprime le rendement Intérêts/Capital

  Or, l'année d'après, ces intérêts vont se cumuler au Capital pour produire eux-mêmes des intérêts.

  Voici pourquoi par exemple si le taux moyen annuel est de 10%, après 2 ans le Capital cumulé ne vaut pas (100+2×10)% (120%) mais (110%)×(110%) = 121% puis ~133% après 3 ans selon le calcul simple : Capital au bout de N années : *(et T le Taux annuel)*



  C = (100+T)% × (100+T)% ×… qui s'écrit ((100+T)%)^N (« à la puissance N ») *N nombre d'années*

- Calcul inverse : Le Cas de Monsieur « A » dont la fortune a bondi en 2017 à 60 milliards d'Euros

  Cette fortune, comme toutes les fortunes, a une progression qui fluctue d'année en année (mais… progression il y a !) aussi, plutôt que de se battre sur 50% ou 10%, prenons une vue d'ensemble au cours de ces 30 ans écoulés depuis 1987 où Monsieur « A » rentra dans le "club" des milliardaires en Francs Avec 1 € = 6.56 F, 60 milliards d'Euros ~ 400 milliards de F, soit un Capital multiplié par 400 en 30 ans !

  Quel taux moyen de progression en 30 ans ? Rép : (400 ^ (1/30)) – 100% donne environ 22% annuel

  Rappelez-vous notre taux de 5% "raisonnable" pour le Calcul d'intérêts/Capital du début de notre chapitre Avec cette fois-ci un taux à 22%, c'est huit fois qu'il faudrait répéter "les intérêts des intérêts des intérêts..."

  Au fait, ce Monsieur se verse un Salaire tous les ans de "seulement" une dizaine de millions d'Euros …

  Or, vous savez comment les Médias raffolent de comparer les salaires des PDG entre eux, et donc pour les journalistes, Monsieur « A » est loin de la tête du classement…
  (En effet, certains approcheraient voire dépasseraient la centaine de millions d'euros ou de Dollars comme les … 500 Millions de Dollars pour le PDG de "Lehman Brothers" en 2007, l'année précédant… sa chute !)

  N'ont-ils pas réalisé, tous ces journalistes aveuglés par « l'Arbre qui cache la Forêt », que ce salaire si « mirifique » soit-il au yeux du commun des mortels, n'est qu'un vulgaire « Argent de Poche » au vu de la progression de sa fortune qui équivaut tout simplement à un revenu d'au moins 10 milliards d'€ l'an passé !

  Ce salaire est englobé 1000 fois dans son véritable revenu… En clair, c'est comme si un "Smicard" donnait en proportion *1 € par mois* à son fils pour qu'il aille s'acheter des "Carambar" s'il a été bien sage…

- *Vous préférez les Footballeurs aux PDG ?*
  Eh bien, si nous faisions la distinction entre « avoir aimé jouer au foot », étant gamins, en se contentant de taper dans un ballon, entre copains, et être « fan du football actuel et de ses joueurs pro » ?

  Car c'est fou comment les salaires des « Stars » restent « bien vus » puisque *« après tout, ils jouent pour notre plaisir…rhaa »* En fait, ces salaires & revenus publicitaires dépassent la raison du supporter de base

  Exemple : Un joueur comme le (portugais) « R » touche désormais environ 100 millions d'€ par an !

  Mais c'est tellement plein de « zéros » que cela ne veut toujours rien dire au commun des mortels.

  Alors, on va tout de même lui fixer les idées en lui donnant un repère en considérant le SMIC portugais qui vaut 500 € net par mois soit 6 000 € par an, qui représenterait (×40) ~250 000 € toute une vie…

  Avec son « club » Réal Madrid et l'équipe du Portugal, « R » joue 80 matchs par an… *Vous suivez ?*

  ☺ « Calcul de Fraction » : Combien gagne « R » en un Match ? 100 M€ / 80 m = 1 250 000 €/match

  « Monsieur » « R » gagne en un match autant que 5 smicards portugais toute leur vie !

  - Eh bien cette réalité-là, c'est ce qui m'a guéri pour toujours du foot à la Télé ou dans les stades…

Répartitions : comprendre les figures et leur signification

Avez-vous entendu parler de salaires ou revenus « médians » ? « moyens » ?…
Sans doute un peu, déjà… Oui mais… De quoi parle t-on au juste ?

On parle bien d’une répartition de salaires ou revenus au sein d’une Population, mais la plupart du temps, la répartition n’est pas ou peu présentée au public… On ne préfère lui jeter en pâture qu’une valeur ou deux…

C’est bien gentil les moyennes, mais entre par exemple 15°C de moyenne sur une année, obtenue entre 5°C l’hiver et 25°C l’été d’une part , et –15°C à 45°C d’autre part, qualitativement ce n’est plus la même moyenne !

Aussi, pour illustrer une répartition, on recourt au graphique d’une fonction qui présente au moins les éléments suivants :

1. Un repère constitué d’un axe horizontal d’abscisses qui accueille l’amplitude par exemple des salaires puis d’un axe vertical d’ordonnées qui accueille, lui, l’amplitude des échantillons de population

   Les deux axes se croisent en une Origine commune aux deux axes.

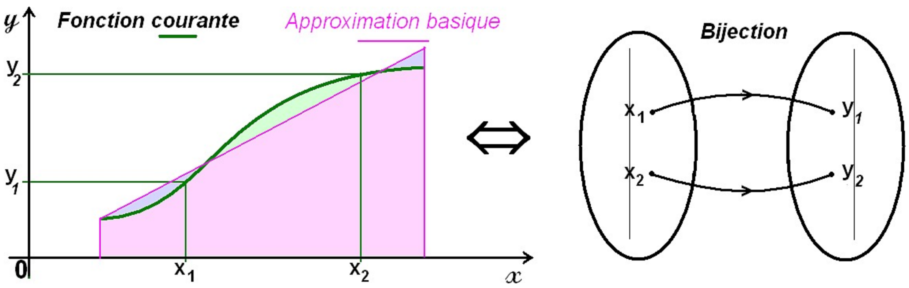
   Par convention le plus souvent, on donne la lettre x aux abscisses et y aux ordonnées

2. Une « courbe » qui relie des points dont les coordonnées (abscisses et ordonnées respectives) vérifient la « fonction » (se dit aussi « relation » telle la relation entre les coordonnées).

Avant d’utiliser le plus communément un tel graphique, on avait l’habitude de répartir les points en deux ensembles qui recueillaient deux échantillons de valeurs reliées entre elles de part et d’autre…

Les graphiques se sont avérés avec le temps plus commodes (à condition de ne pas tromper le lecteur (!))

Voici donc des exemples de fonctions :



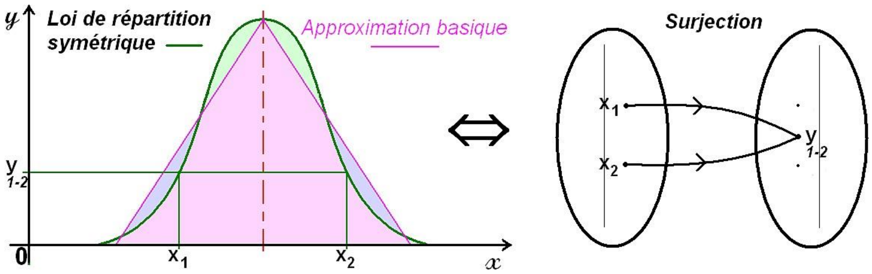
La fonction est donc représentée par une courbe (ici en vert) constituée de points définis par leurs coordonnées respectives que sont les paires (x_i, y_j).

Le trapèze rose est la surface équivalente balayée par la courbe au dessus de l’axe des abscisses

Une loi de répartition s’illustre souvent par une courbe dite « en cloche »

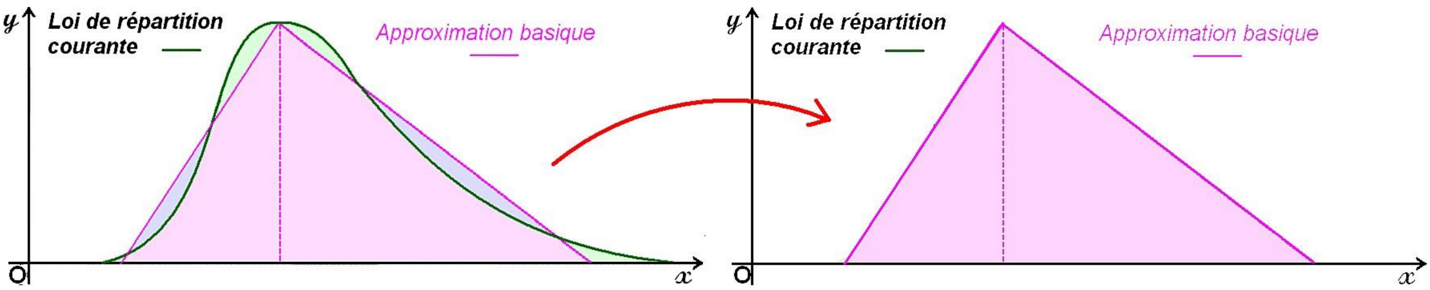
Ici, nous avons une courbe qui adopte un axe (vertical) de symétrie

Nous constatons que nous pouvons en approcher la surface par celle d’un triangle isocèle



Cependant, la répartition courante adopte plutôt le profil d’une courbe « en cloche » déformée vers la droite ou la gauche (le plus souvent vers la droite, en ce qui concerne les salaires, revenus, patrimoines…)

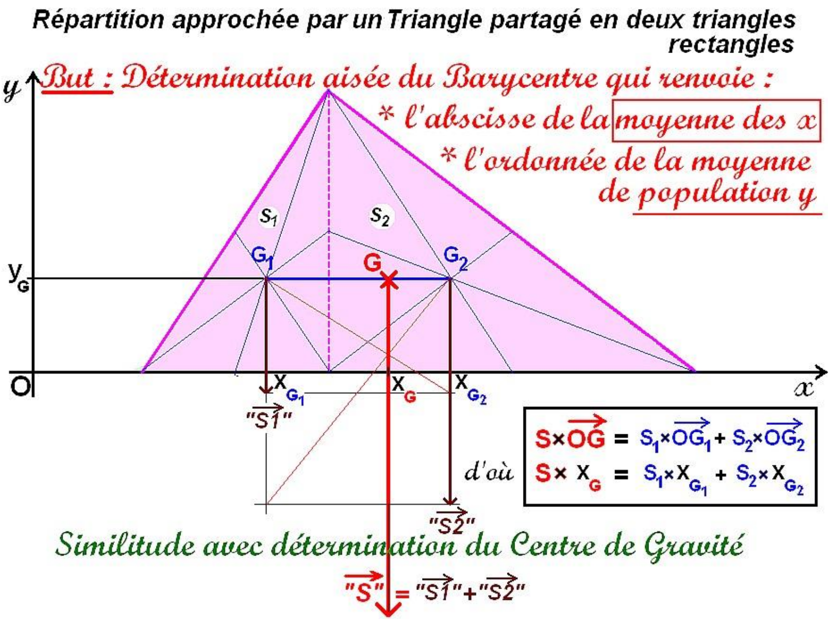
Pour en extraire les grandeurs « médianes » ou « moyennes », il s’avère que la Surface suffit amplement…



De plus, une bonne approximation par un Triangle partagé autour de la hauteur entre le Sommet et la Base permet de recourir aux analogies les plus claires pour comprendre donc la signification de ces termes :

En effet, on recourt à la physique concrète qui s’illustre autour de la répartition des masses et du poids !…

Quand la « moyenne » renvoie au barycentre d'une surface qui renvoie lui-même au centre de gravité



En effet, imaginons cette surface dotée d'une épaisseur (le fameux carton que l'on découpe…), cette surface sera en fait une fine matière dotée d'une masse globale qui sera par conséquent soumise à un poids.

Telle un mobile suspendu à son fil, elle s'équilibre autour de son centre de gravité…

Ce dernier est finalement déterminé par la répartition des masses ; il dépend de la forme du triangle [de la surface en général] Les vecteurs vus dans le cours précédent permettent de bien représenter cela…

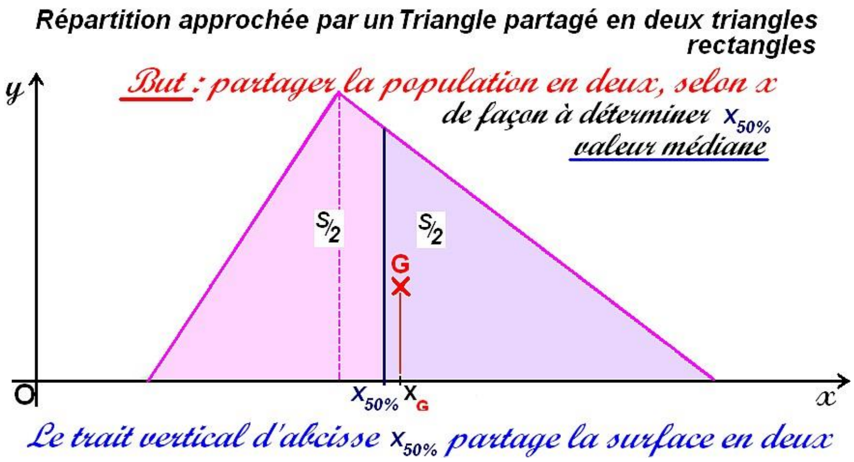
L'astuce du recours aux deux triangles est la façon simple de déterminer le centre de gravité par combinaison de deux centres adjoints qui sont les intersections des médianes diagonales des triangles…

Quand la « médiane » s'avère plus simple dans son principe mais moins immédiat dans son calcul…

La définition de la médiane est ici la frontière qui sépare les 50% en partant du minimum répertorié sur l'échelle des abscisses et les 50% restants.

On comptabilise donc la population en les séparant par tranches d'abscisses… Ces tranches couvrent donc des petites surfaces élémentaires dont la somme constitue la surface totale

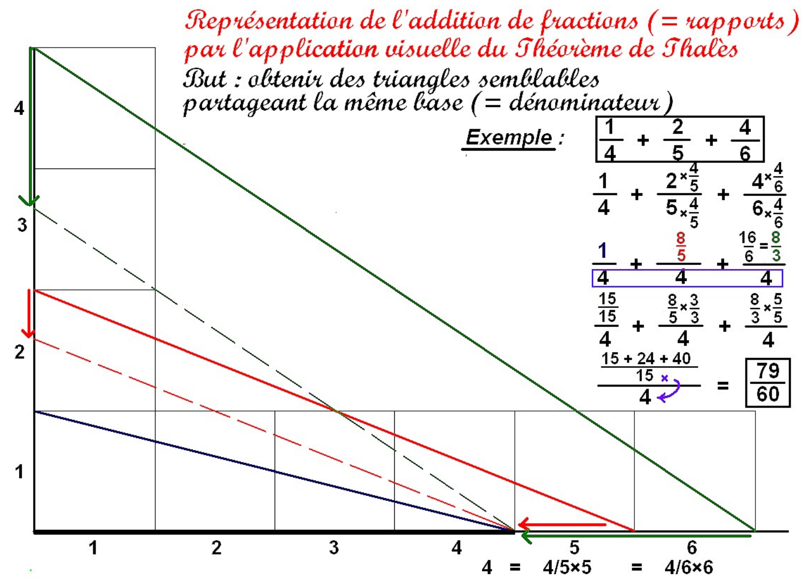
C'est donc un simple calcul de surface, pour déterminer ensuite la ligne de partage de cette surface en deux.



Il faut néanmoins déterminer par un calcul précis, le lieu exact sur les abscisses (résoudre pour cela une équation), localiser donc le fameux **x** « 50% ».

- Quand la figure est déformée vers la droite, la valeur « médiane » est inférieure à la valeur « moyenne » (C'est le cas des salaires, revenus, patrimoines…) Plus elle est déformée et plus l'écart est significatif (!)…

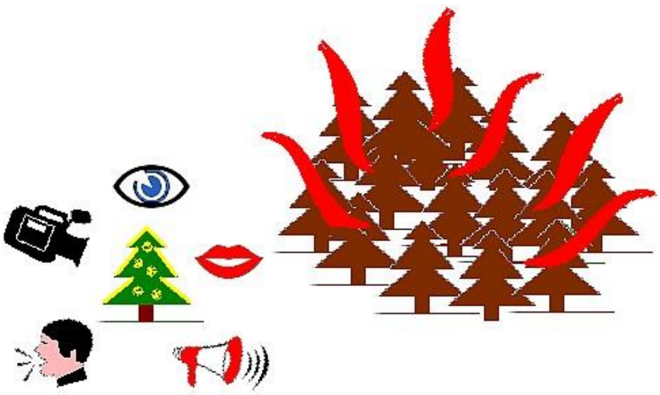
Une dernière figure pour comprendre l'addition de fractions…



Oui, ce bon vieux Thalès nous est encore utile puisqu'il attire notre attention sur le fait que les fractions sont des … rapports (Plus les rapports sont élevés, plus la pente est raide…)

Additionner des rapports se fait au minimum avec un dénominateur commun qui est ici la base des triangles…Adopter une base commune se fait naturellement à l'aide d'échelles adéquates et donc des rapports d'échelle… Il ne reste plus qu'à additionner les hauteurs et on trouve ainsi le numérateur

☺ Conclusion avec Dédé la débrouille, le roi des fractions de cigarettes !



<u>Des « stats » et des « chiffres »…</u>

Ou comment extraire l'information pertinente de la cacophonie médiatique

Devenu Ingénieur par goût des sciences depuis ma prime jeunesse, j'ai toujours pensé, depuis l'âge adulte, que ce qui faisait l'essentiel de mon métier scientifique <u>reposait sur des règles bien simples</u> :

*maîtriser les ordres de grandeur et la simple « règle de 3 », enfin **toujours** recouper les informations.*

Autrement dit, entretenir par une curiosité scientifique, certes une culture acquise par l'observation, mais aussi adopter une conduite faite de vérifications toutes simples, à la portée de tout un chacun, chacune.

Cette conduite devrait être enseignée dès l'enfance et conservée toute notre vie, afin de ne plus nous soumettre à toute manipulation ou désinformation ; mais savoir « prendre du recul » en toute circonstance.

Pas facile me direz-vous, vu le matraquage perpétuel de « stimuli », mais essayons, petit à petit, à y résister, et enseignons-le ensuite autour de nous, à toutes les générations, car il n'est jamais trop tard…

Voici donc quelques exemples de manipulations de l'Opinion et, pour les déjouer, l'application de simples outils mathématiques enseignés dès l'école primaire – et donc sans faire de nous, des « experts scientifiques en Données (Data scientists) » que « s'arracheraient les décideurs » pour leur propre profit.

Petite mise en bouche : des résultats qui pleuvent tous les jours… *pour rien !*

Depuis les années 70, nous assistons dans les Médias à deux phénomènes antagonistes, du moins en apparence… En effet, nous constatons que, soit :

a) les journalistes nous abreuvent de commentaires <u>sans le moindre argument chiffré</u> car …« fastidieux ! »
b) ils vous ramènent l'info à l'énoncé d'<u>un seul résultat</u> (souvent un pourcentage) car… « imparable ! »

En réalité a) sert à noyer le poisson et b) sert à marquer les esprits ou plutôt… sidérer le plus grand nombre…

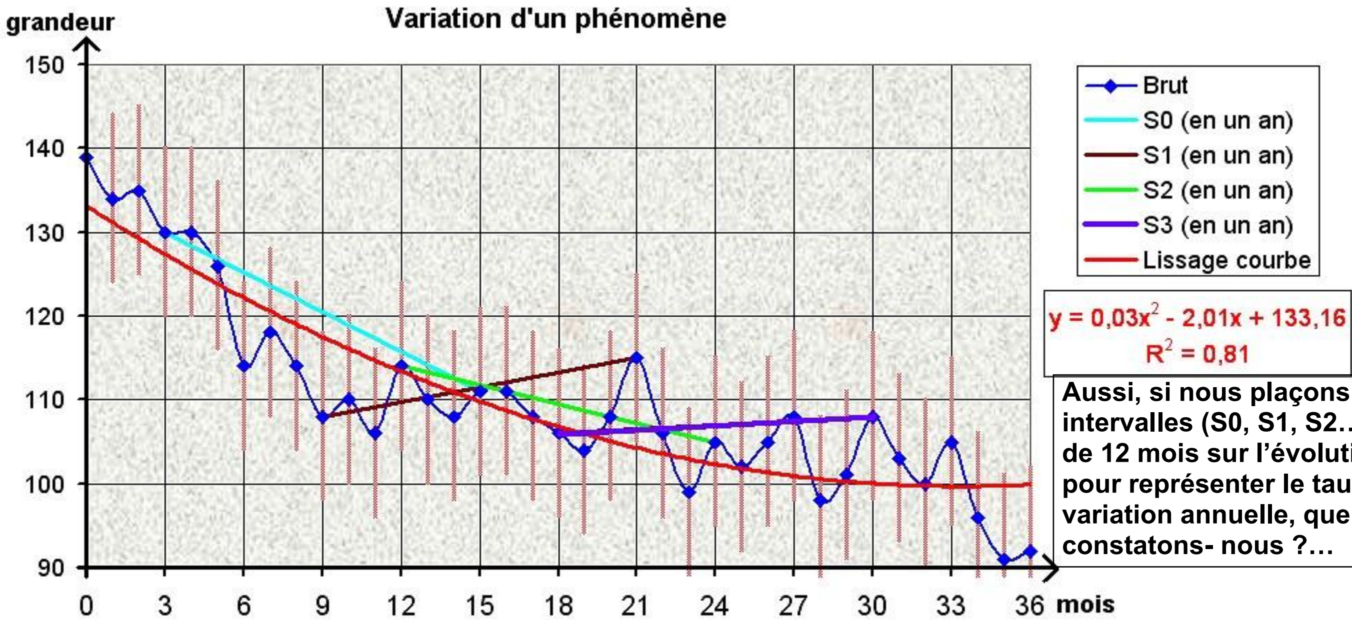
Pour bien meubler l'« actualité », sont présentés par exemple tous les jours les cours de la Bourse, mais plus encore tous les trimestres si ce n'est tous les mois, le nombre de tués sur la route ou celui des chômeurs, appuyé par la caution d'une « amplitude périodique » qui offrirait une marge d'appréciation conséquente !

Eh bien, avec l'<u>explication illustrée suivante</u>, nous allons envoyer cette assertion … à la flotte !

Ainsi, nous avons choisi de représenter la mesure effectuée tous les mois d'une grandeur quelconque qui peut être aussi bien un indice mensuel économique, social ou même sociétal… en tout cas conjoncturel.

Certains peuvent remarquer que voilà un phénomène bien agité ! (« chaotique » en langage scientifique…)

Mais croyez-vous… que **la vie est un « long fleuve tranquille » ?** *Bien sûr que non ; elle serait même en certaines occasions un torrent quelque peu furieux ! Mais plus simplement, la Vie agit en toute liberté …*



Aussi, si nous plaçons des intervalles (S0, S1, S2…) de 12 mois sur l'évolution pour représenter le taux de variation annuelle, que constatons- nous ?…

*<u>Cela ne fait que rebondir !</u> Et **c'est bien normal !** Puisque prendre deux seules mesures séparées par un intervalle de durée quel qu'il soit <u>n'amortit en rien</u> le « chaos » qui se propage au cours du temps.*

Pourtant c'est fou comme cela fait gloser les journalistes – ou « journaleux » ? – et les politiciens qui en profitent, à la moindre occasion de rebond défavorable, pour prendre des « mesures nécessaires »…

*Or, le <u>seul recul</u> par rapport à l'évolution du phénomène étudié <u>permet</u> d'exprimer la courbe moyenne liée à son amplitude chaotique (le « bruit ») tout autour et ici <u>de conclure</u> : « ça diminue puis ça se stabilise » **Point !***

Présenter un graphique « très parlant » mais qui cache une belle supercherie…

« Alors, si un pourcentage isolé n'est pas très parlant, présentons donc au public un graphique complet qui l'est forcément davantage… », quitte à en exagérer l'effet.

Que comprend un graphique ? *Le plus souvent, une courbe d'évolution située dans un repère (☺ Nous n'avons pas forcément besoin de personnages rajoutés autour même si cela peut paraître plus joli) qui permet de représenter algébriquement la relation entre les deux coordonnées – comme les deux dimensions de la surface d'une feuille – que sont l'abscisse et l'ordonnée de chaque point de cette courbe*

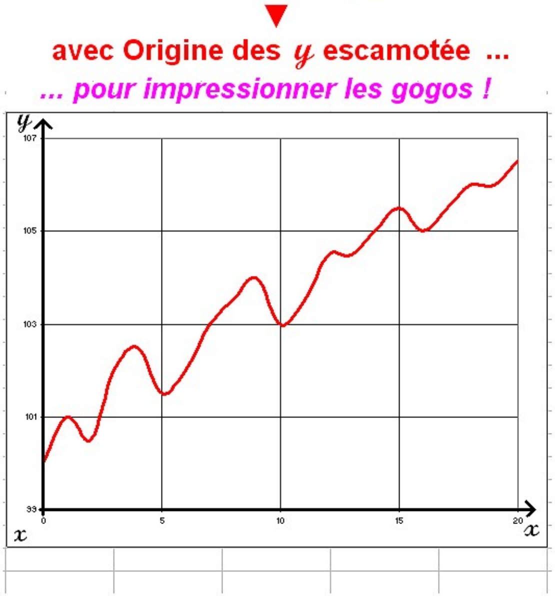
Le Repère, que l'on appelle parfois cartésien, a justement été popularisé dans le monde scientifique par René Descartes (1596-1650) pour permettre de représenter tout et n'importe quelle fonction, même en dehors de la Géométrie, qui elle, deviendra « analytique » (l'analyse permet de réduire un tout en tous ses éléments)

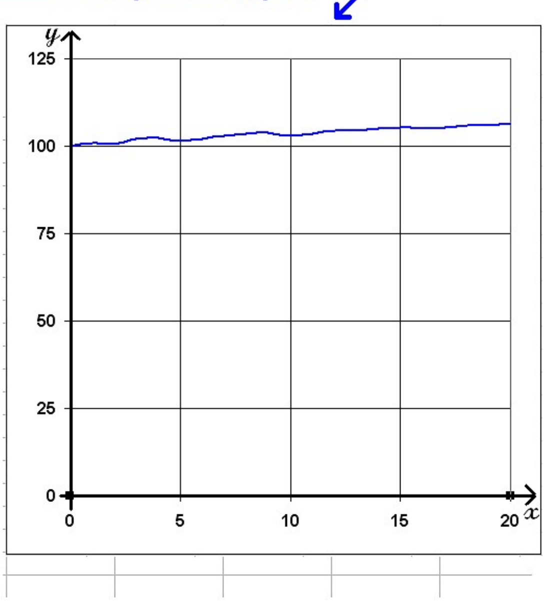
Le repère cartésien comprend donc un axe des abscisses horizontal « coupé » (d'après son nom) par celui des ordonnées sauf que dans le 1er cas illustré suivant, ce dernier n'est pas coupé en retour au bon endroit …

Comment cela, pas « coupé » au bon endroit ? Mais oui, cherchez l'Origine (le Zéro des ordonnées verticales) et vous ne la trouverez pas sur la graphique de gauche. En effet, celui-ci a grossi l'échelle – exit donc le zéro sur l'axe vertical qui commence à … 99 ! – afin de vous représenter, une ascension beaucoup plus flatteuse !

x	*y*
0	100
1	101
2	100,5
3	102
4	102,5
5	101,5
6	102
7	103
8	103,5
9	104
10	103
11	103,5
12	104,5
13	104,5
14	105
15	105,5
16	105
17	105,5
18	106
19	106
20	106,5

Mêmes données avec deux représentations différentes : ► **Repère complet**





Mais si ! Le graphique de droite utilise bien les mêmes données communes aux deux.
Ah c'est sûr, il n y plus de quoi grimper aux rideaux ! *(Mais c'est sans doute plus honnête, non ?)*

Occuper le terrain avec l'arbre qui cache la Forêt

Les Médias adorent s'emparer d'un sujet qui va pouvoir occuper la « Une » durant des semaines, en braquant les projecteurs sur l'événement qui « obligera » de surcroît hommes et femmes politiques de toutes sortes à s'exprimer sur celui-ci ; bien entendu, une fois le « temps médiatique » épuisé, on changera de sujet

Ainsi, pour prendre un exemple le moins à controverse : le Chômage…

Pour bien « saisir »nos braves citoyens, ils choisiront le cas dramatique de cette entreprise « Martin », au bord de la faillite, qui va « devoir » licencier son personnel – 50 personnes environ le plus souvent – *et ils ne lâcheront pas l'affaire tant que tous les élus de la Région, voire de France entière, n'auront tous surenchéri pour offrir ne serait-ce qu'une « digne » prise en charge de… la perte des emplois à prévoir tout compte fait.*

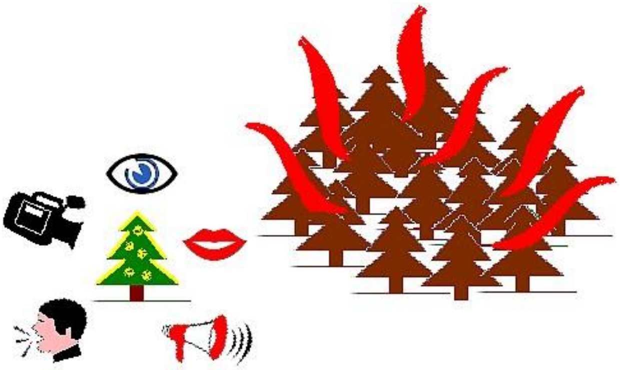
Alors prenons du recul et le temps de nous informer du contexte général (prendre le temps en effet, car le feuilleton va durer tous les jours durant un mois, au bas mot)

- *Il s'avère en temps de Crise, que le Chômage peut augmenter d'« un à deux points » tous les ans ; cela se traduit par « un à deux % de la population active » supplémentaires tous les ans.*

Population active en France ? Si nous ne passons pas notre vie dans les bases chiffrées de l'INSEE, estimons-en la taille par rapport à la population française dont on écarte, par définition de l'« activité professionnelle » les enfants et les jeunes toujours scolarisés, les retraités et une partie non négligeable des femmes (☹ sous prétexte qu'elles n'ont pas une activité professionnelle alors qu'elles ont une activité à plein temps de mère au foyer par exemple)…

« À la louche » cette population active vaut une petite moitié de la population totale (mais quand même un bon 40%) L'ordre de grandeur donnera environ 30 millions de personnes (28 à 29 millions en vrai ?)

Par conséquent, 2% de chômeurs en plus de cette population active c'est au bas mot 600 000 personnes qui auront perdu leur emploi (et une infime fraction d'entre eux en auront retrouvé un, avant la fin d'une année)



Quand on prend la peine de s'intéresser un tant soit peu aux réalités du chômage, on découvre que 90% des licenciements le sont à titre individuel, les 10% restants comptent en moyenne dix personnes à la fois.

Donc 50% environ de ces 600 000 personnes soit 300 000 seront licenciées individuellement sans ***qu'aucune mesure d'accompagnement social soit prise à leur égard*** *(Soit donc 25 000 par mois donc 500 fois plus que les 50 « Martin » sous les feux des projecteurs)*

Ainsi, durant un mois pendant que tout le beau monde se soit mobilisé autour de l'arbre « Martin », la Forêt de 500 autres arbres aura brûlé dans une totale indifférence…

Concluez vous-même…

Comment réduire une enquête approfondie à l'énoncé d'une simple moyenne

C'est très pratique les moyennes, mais nous pouvons nous demander à quoi est-ce vraiment utile et pour qui, lorsque les commentateurs se gardent bien de rappeler l'amplitude des résultats et le contexte de l'étude…

Imaginez qu'on vous annonce que tel individu, s'étant prêté à une expérience de laboratoire, a bien supporté le test puisque sa température corporelle s'est maintenue à 37°C ! *Sauf qu'on a omis de préciser que le sujet, bardé de capteurs, avait la tête dans le four et les jambes dans le congélateur, mais… pas d'problème car la moyenne des températures des capteurs donnait (par miracle) 37°C ! Pas sûr que le cobaye ait apprécié ☹*

Voici donc comment fut présentée en quelques secondes, par un commentateur vedette de grande chaîne TV l'étude très approfondie d'une enquête de "Discrimination à l'embauche" (celle-ci fut menée durant un an par une équipe universitaire, de Septembre 2005 à Août 2006, sur un ensemble de 1340 offres types d'emploi) :

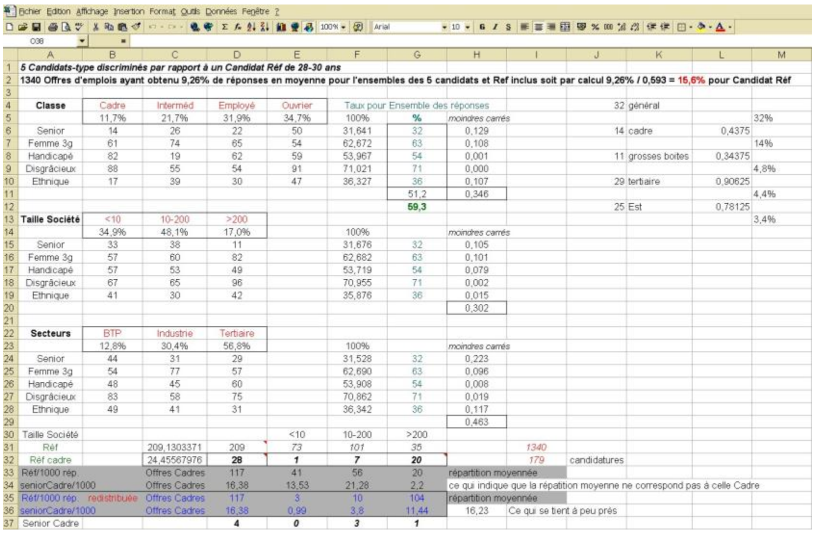
« Les Seniors sont 3 fois plus discriminés que le profil idéal à l'embauche », mais (petit plus) « la situation s'est améliorée pour les personnes handicapées » *Et maintenant passons à la Météo ...*

Il me semble qu'un véritable « journaliste » aurait « feuilleté » au moins une page de plus, pour découvrir en effet que la situation est bien plus dramatique que cela (parfois moins également), étant donnée « l'énorme » dispersion des résultats selon les cas de figure…

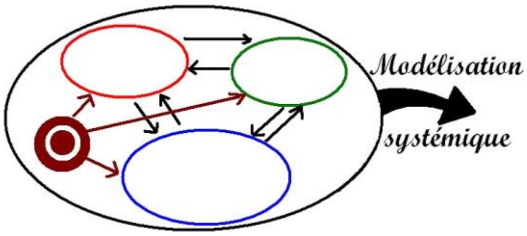
- Cette enquête dont le document-synthèse de quelques pages était en accès libre sur Internet, à l'époque *(il y a donc douze ans, mais depuis la situation aurait plutôt empiré…)* portait sur la discrimination au travers de 5 profils type : « immigré » « senior » « mère au foyer » « handicapé » « disgracieux » (!) en concurrence avec un candidat non pas idéal mais « standard » servant de référence.

Contre toute attente (!…), la moyenne nationale désigna les «seniors» avant les «immigrés» comme étant les plus discriminés « pour une convocation à un premier entretien »

Quand nous voudrions exploiter au mieux les résultats de cette étude pour en exploiter toute la quintessence, un simple « tableur » (qui permet de faire tellement plus que présenter des chiffres seuls dans un tableau) suffit à l'affaire, à condition de bien poser les paramètres… Cela procède d'une ingénierie rétrospective « avec un peu de jus de cervelle » et cela donne ça, ci-contre >>>>



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	*5 Candidats-type discriminés par rapport à un Candidat Réf de 28-30 ans*												
2	**1340 Offres d'emplois ayant obtenu 9,26% de réponses en moyenne pour l'ensembles des 5 candidats et Ref inclus soit par calcul 9,26% / 0,593 = 15,6% pour Candidat Réf**												
3													
4	**Classe**	Cadre	Interméd	Employé	Ouvrier	Taux pour Ensemble des réponses				32	général		
5		11,7%	21,7%	31,9%	34,7%	100%	%	*moindres carrés*					32%
6	Senior	14	26	22	50	31,641	32	0,129		14	cadre	0,4375	
7	Femme 3g	61	74	65	54	62,672	63	0,108					14%
8	Handicapé	82	19	62	59	53,967	54	0,001		11	grosses boites	0,34375	
9	Disgrâcieux	88	55	54	91	71,021	71	0,000					4,8%
10	Ethnique	17	39	30	47	36,327	36	0,107		29	tertiaire	0,90625	
11							51,2	0,346					4,4%
12							**59,3**			25	Est	0,78125	
13	**Taille Société**	<10	10-200	>200									3,4%
14		34,9%	48,1%	17,0%		100%		*moindres carrés*					
15	Senior	33	38	11		31,676	32	0,105					
16	Femme 3g	57	60	82		62,682	63	0,101					
17	Handicapé	57	53	49		53,719	54	0,079					
18	Disgrâcieux	67	65	96		70,955	71	0,002					
19	Ethnique	41	30	42		35,876	36	0,015					
20								0,302					
21													
22	**Secteurs**	BTP	Industrie	Tertiaire									
23		12,8%	30,4%	56,8%		100%		*moindres carrés*					
24	Senior	44	31	29		31,528	32	0,223					
25	Femme 3g	54	77	57		62,690	63	0,096					
26	Handicapé	48	45	60		53,908	54	0,008					
27	Disgrâcieux	83	58	75		70,862	71	0,019					
28	Ethnique	49	41	31		36,342	36	0,117					
29								0,463					
30	Taille Société				<10	10-200	>200						
31	Réf		209,1303371	209	*73*	*101*	*35*		*1340*				
32	Réf cadre		24,45567976	**28**	***1***	***7***	***20***		*179*	candidatures			
33	Réf/1000 rép.		Offres Cadres	117	41	56	20	répartition moyennée					
34	seniorCadre/1000		Offres Cadres	16,38	13,53	21,28	2,2	ce qui indique que la répatition moyenne ne correspond pas à celle Cadre					
35	Réf/1000 rép.	redistribuée	Offres Cadres	117	3	10	104	répartition moyennée					
36	seniorCadre/1000		Offres Cadres	16,38	0,99	3,8	11,44	16,23	Ce qui se tient à peu prés				
37	Senior Cadre			***4***	***0***	***3***	***1***						



☺ *Mais comme notre vocation, à nous tous et toutes, n'est pas de devenir expert(e)s en modélisation, mais simplement d'être un peu plus curieux(ses) que les commentateurs-trices TV, semble t-il, nous allons nous débrouiller avec de simples astuces de calculs de % et nos souvenirs d'école primaire…*

Quand vous lisez à la suite (ramené à 100% de convocations à un premier entretien du profil «référent»)
a – « 32% de convocations pour un Senior » (le fameux « 3 fois plus discriminé » du résumé)
b – « 14% de convocations pour un Senior s'il postule à un poste Cadre »
c – « 11% de convocations pour un Senior s'il postule dans une grosse PME / Entreprise (effectif de plus de 200 personnes d'après l'étude) » *mais pour info « 38% » dans une PME moyenne (effectif 20 à 200)*

Vous pouvez vous interroger : « Quel pourcentage pour un **Senior Cadre** postulant dans une grosse boite ?

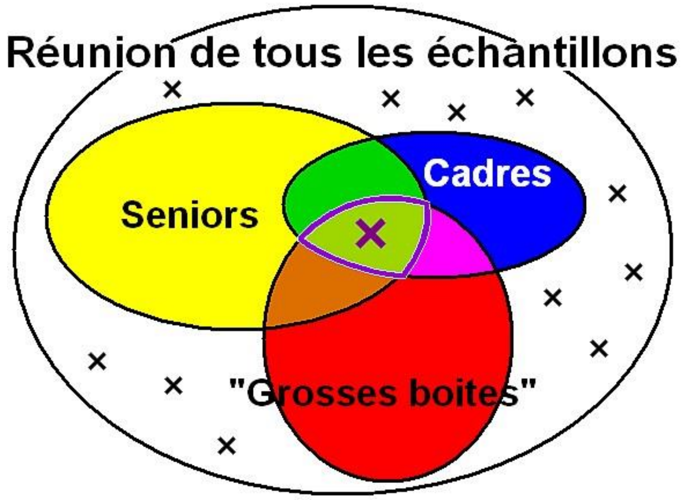
Ce qui signifie donc, pour un Cadre Senior, de postuler à un poste d'entreprise de plus 200 personnes, mais également, par extension des méthodes de recrutement actuelles, à toutes les boites d'intérim ou sociétés de services qui prennent leurs consignes des mêmes grosses entreprises (ce qui commence à faire pas mal….)

Rien de tel qu'un petit graphique pour comprendre comment nous allons jongler avec les pourcentages…

Eh oui, se souvenir des Maths modernes de l'école primaire – années 60 à 70 en tout cas – …

Intersection des sous-ensembles d'appartenance veut dire **ET** et cela se calcule par une **multiplication** des résultats intermédiaires – mais en veillant toujours à se référer au résultat global.

Réunion des mêmes sous-ensembles veut dire **OU** et cela se calcule par une **addition** des résultats obtenus et, à la fin, nous retombons sur la moyenne de départ)

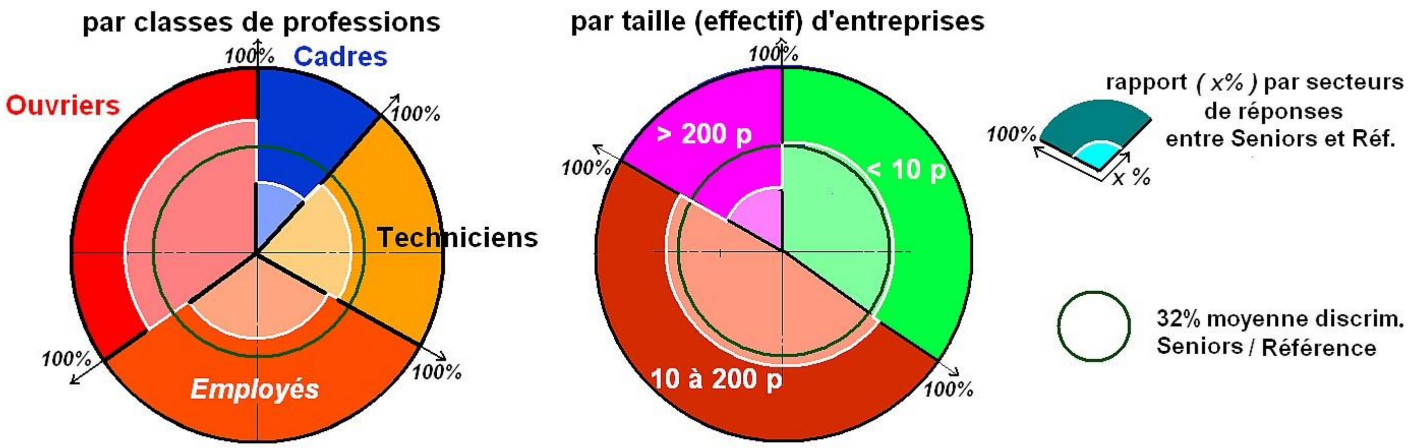


Réponse donc : 32% x 14% / 32% x 11% / 32% = 14% x 11%/32% = ...(4,8%) soit même pas 5%!...
Oui, on en déduit de prime abord que l'handicap pour un Senior Cadre pour décrocher un premier entretien pour une grosse boite est du **20 Contre 1** !

Est-ce désespérant ? Intellectuellement pour nous qui, en quelques opérations basiques, venons de découvrir le *pot aux roses* : Non ! Au contraire ! En tout cas cela console un peu de la triste réalité du marché du travail.

Voilà comment peut-on « fertiliser » au mieux le seul résultat de la moyenne de 32% *en représentant des « camemberts » graphiques améliorés (après avoir exploité au mieux le tableur décrit précédemment)*

Test Discrimination Emploi des Seniors : 2 exemples



- Pour être honnête jusqu'au bout, il faut ne pas nous limiter aux seuls résultats bruts de l'enquête, mais rechercher également les marges d'incertitude, et donc toujours par analyse des résultats, constater qu'un résultat des réponses si faible amène une incertitude conséquente… ***Donc il convient d'écrire alors :***

Un Cadre senior qui postule pour un poste en grande entreprise n'obtient que « 0 à 10% » des réponses du référent cadre de 30 ans (10 Contre un au mieux ! *Donc fuir ces grosses boites à moins de bénéficier d'un énorme piston !*) Par contre [10 à 25 %] en PME moyenne : plus raisonnable pour y tenter sa chance…

Extension aux sondages auxquels on fait tout dire et n'importe quoi

L'exemple de l'étude précédente montre que lorsqu'on s'en donne la peine, on peut toujours estimer une marge d'erreur ou d'incertitude.
C'est ainsi, qu'en Physique, et encore plus en Sociologie, il faut obligatoirement associer l'incertitude à chaque résultat fourni.

Et de surcroît, cela ne sert à rien d'écrire plusieurs chiffres après la virgule, si l'erreur est déjà conséquente…

Exemple : Il est stupide d'écrire 18,574 avec une erreur possible de 10% ! Cela voudrait dire qu'en réalité le résultat est à peu près situé entre 16,5 et 20,5… On écrit plutôt alors 18,5 +/- 2

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'en partant d'une étude pourtant complète portant sur 1340 offres d'emploi type (donc non négligeable) pour 5 milliers de candidatures environ effectuées, qu'on pouvait aboutir, en croisant plusieurs critères à n'obtenir qu'une réponse favorable : une sinon deux c'est déjà 100% d'erreur !

Il est déjà arrivé de lire (***écrit en tout petit***) dans la Presse que des sondages exprimés en pourcentages ne portaient en réalité que sur 83 personnes sondées !

Je vous laisse augurer de la marge d'erreur, d'autant plus que l'on peut cumuler la « versatilité » des sondés à l'imprécision des questions comme à celle de l'échantillonnage !…

Retenez que dans la grande majorité des cas, tirer des conclusions et échafauder de grandes théories sur la base de réponses séparées par moins de 5% revient tout bonnement à **« Construire sur du Sable »** !

Impressionner le public avec des phrases choc !

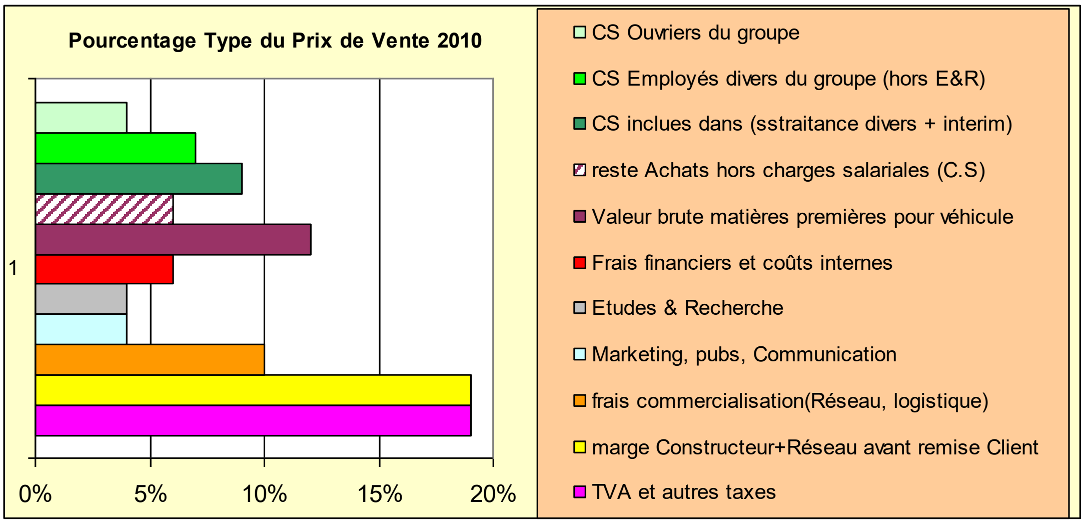
« Cela coûte 3 fois moins cher de fabriquer une voiture à l'étranger qu'en France !…»

Alors, mon Bon Monsieur, ou ma Bonne Dame, comment voulez-vous ne pas délocaliser à l'étranger, à moins, à moins de subventionner généreusement l'industrie en France, baisser les charges, supprimer les cotisations sociales, supprimer les 35 heures, voire supprimer le SMIC, etc..., etc...

J'ai fait un petit sondage autour de moi un jour sur la place du « village » :
« C'est pour un Sondage, d'après vous, pour une petite voiture française fabriquée à l'étranger parce que ça coûte là-bas 3 fois moins cher qu'en France... S'ils la vendent dans ces conditions à seulement 10 000 € en France, à combien devraient-ils la vendre s'ils la fabriquaient en France où c'est donc 3 fois plus cher à fabriquer ?
Je vous assure que les gens se prêtent au jeu de bonne grâce :
On me répond en moyenne entre 3 000 et 5 000 € de plus : soit obligés de la vendre entre 13 000 et 15 000 €.

En fait de quoi est constitué le Prix de vente d'une voiture ?

Voilà ce que j'ai obtenu par recoupements de différents articles de presse, voire encyclopédies pour répartir les différents coûts et marges pour un véhicule fabriqué en France – toujours par *ingénierie rétrospective* et modélisation systémique (au % près, peut-être 2% au pire pour une ou deux rubriques) :



Tenez bien compte du découpage effectué afin de dégager l'ensemble des charges salariales (**CS**) avant la sortie d'Usine

Par charges salariales (**CS**), j'entends :

Salaires bruts & primes + charges patr. + Congés payés + Formation continue + Avantages liés

*Non incluse part salariale dans **E&R***

Soit 20% de charges salariales dont la moitié au maximum est susceptible d'être délocalisée.

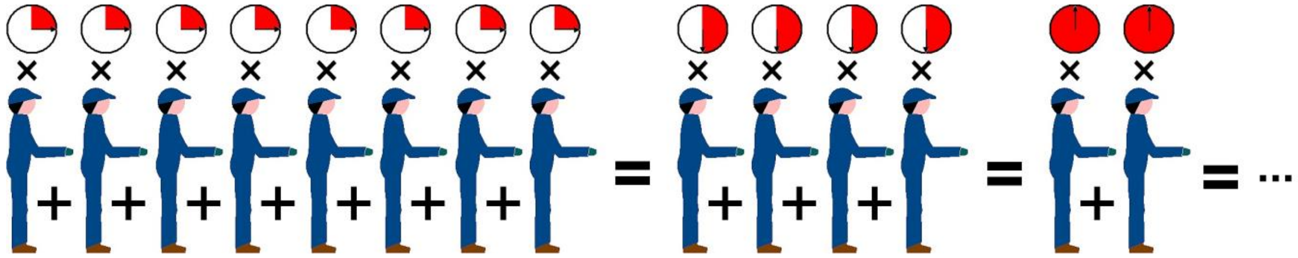
C'est seulement sur 10% du Prix de vente, mais sur des personnes (!) qu'on continue d'accroître la pression…

Faisons un Calcul tout simple, à la suite d'une info vue dans la presse (certes, il faut avoir l'œil averti pour repérer ce genre d'information…)
Le coût de revient de fabrication était en 2005 de 25 € en France et 8 à 9€ en Tchécoslovaquie ou Slovénie, bref là où sont désormais construites les Twingo ou autres 107 (108) et C1 (C'est de ça qu'on parle avec le « trois fois moins cher ! »☺) : Donc 16 € économisés par heure×ouvrier à la fabrication…

➢ *Qu'est-ce qu'une* ***heure×ouvrier*** *de prix de revient de fabrication ?*

Cela inclut les salaires et charges et tous les frais directs liés à la fabrication effective, total divisé par le nombre d'heures et par le nombre d'ouvriers qui travaillent simultanément sur le même objet à fabriquer.

Soit concrètement…



Si 8 ouvriers travaillent en même temps sur la voiture durant un ¼ d'heure, on compte 8 ouvriers x ¼ d'heure = … = … = 2 heures×ouvriers

Combien d'heures×ouvriers faut-il pour assembler la « p'tite » voiture : 20 heures (et cela fait déjà moins de nos jours…) d'après une info glanée dans un autre article économique, et un reportage à la télévision.

Donc, le grand constructeur économise sur l'assemblage : 20 × 16 € = 320 € !   Ouahouh !…

Même en comptant toutes les économies de salaires (certaines pièces sous-traitées à l'étranger avant l'assemblage, par exemple) on n'aboutit pas à 600 € au total pour le cas de la Twingo ou de la 107.

➢ Mais dites ! Il faut la ramener la voiture, de là-bas, pour la revendre en France : Transports sur trains ou camions, assurances, frais divers... comptez au bas mot 0,30 € du km par voiture sur 1200 km en moyenne entre Slovaquie, Slovénie et la France. Il reste au bilan même pas la moitié de 600 €

Allez !… 300 € adjugé avec TVA à 20% comprise.

Résultat final : 10300 € fabriquée en France au lieu de 10 000 € en Europe de l'Est pour la même marge !

On trouve **3%**, *peut-être 6% au pire*, mais pas 30% ou 60%… Non : **3% !**

(Sans blague ! moi aussi, je peux vous faire de la formule Choc !)

Voilà comment avec une simple calculette et un peu de jugeote, on vient de réajuster l'ordre de grandeur.

Alors, entendons nous bien ! Que les grands constructeurs français fabriquent des voitures à l'étranger pour se rapprocher des marchés locaux ! OK ! On peut comprendre même si on n'est pas économiste !
Mais qu'on cesse de forcer l'adhésion populaire en faisant croire que ça leur revient beaucoup moins cher et rajouter de plus (!) que les bénéfices peuvent aider à compenser les emplois perdus en France...

Epilogue (daté 02/2010) : Il est fort à parier que certains hommes politiques se soient mis à la Calculette, vu que, peu après ma démonstration qui remonte à fin 2009, notre Cher (!) Mr Carlos GOHN, le Patron d'alors de Renault s'est senti obligé de chiffrer l'économie réalisée pour la fabrication de la Clio à partir de 2011 en Turquie (pays encore donc plus éloigné, y compris en terme de salaires, que nos pays de l'est précédents)

➢ Clio au prix de vente moyen de 15 000 € en France ; économie attendue : 1 400 € par voiture, économie que Monsieur GOHN décompose ainsi :

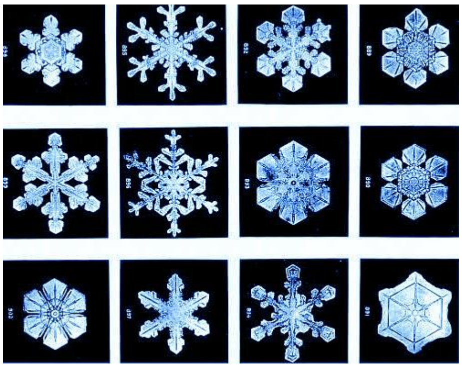
1400 € = 250 € sur les salaires + 750 € de cotisations sociales (Ah oui ?) + 400 € de Taxe professionnelle
La Taxe professionnelle tend à disparaître et vous pouvez appréciez au passage le joyeux amalgame réalisé sur la définition de « cotisations sociales »

Rappelez-vous, que sans être dans le « secret des dieux », nous avions estimé la différence brute de coût de revient à 600€ entre la France et la Slovaquie pour une voiture vendue 10 000 €

Appliquons la « Règle de Trois » pour une voiture de 15 000 €, soit donc une différence de 900 € (800€ mini !)

Comparez 800 € en Slovaquie à 1 000 ou 1 400 € en Turquie où les salaires sont encore plus réduits !

Vous voyez qu'avec notre petite calculette, nous étions complètement dans le coup … !)



Des Mathématiques pour notre Terre

Savoir, au travers du prisme mathématique, observer, apprécier et préserver la Nature

Nous sommes les hôtes de notre Terre : en effet, l'Homme, à ses débuts, avait bien compris que nous dépendons d'Elle pour notre survie, et qu'il était bon de ne point l'offenser par une attitude irrespectueuse…

Ainsi, l'Homme commença, pour mieux s'y adapter, à étudier son milieu naturel pour en acquérir une meilleure connaissance : il se mit donc à pratiquer (correspondance étymologique) l'« Ecologie ».

Les Mathématiques – comme nous l'avons vu au premier tome – sont présentes assez rapidement dans l'Histoire pour venir en aide à l'Homme qui s'efforce de mieux tirer parti de son milieu naturel pour passer à l'Agriculture ou l'Elevage. C'est ainsi qu'il compte, repère les jours et les saisons, ou même s'oriente sur Terre et dans l'Espace (ce dernier assimilé par lui à la voûte céleste au dessus de la Terre).

Mais s'il prend bien la peine d'observer autour de lui, il verra bien qu'il n'est pas le seul à maîtriser le sens de l'Orientation – voir les oiseaux migrateurs – le sens de la Mesure – voir la maîtrise de certains félins chasseurs pour estimer les distances… et bien d'autres exemples pour plusieurs espèces – le sens géométrique – quand on voit les ouvrages réalisés par des oiseaux comme par des insectes – voire tous ces sens réunis… Certes, « Rome ne s'est pas fait en un jour » Eh bien l'évolution sur Terre n'a pas attendu l'Homme pour se faire, et on compte plutôt en millions, voire milliards d'années…

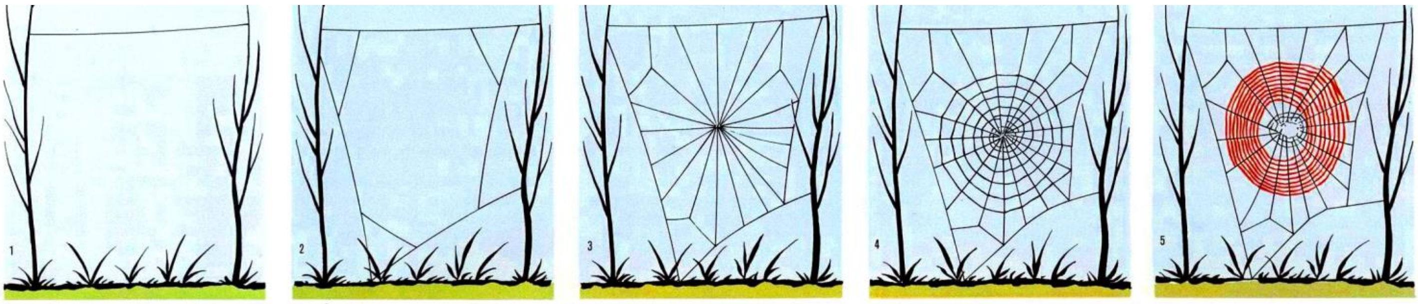
Observer tout cela, de nos jours, est encore à la portée de nous tous et toutes, à tous âges, et de surcroît, le voir à l'occasion avec un « prisme mathématique » n'enlève rien au plaisir mais rajouterait même de la Joie de redécouvrir ainsi les choses si banales soient-elles avec un œil renouvelé en quelque sorte…

L'araignée qui comptait les fils : « pour tisser ma toile, que croyez-vous ? De la rigueur ! »

L'Araignée, appartenant au genre des Arachnides désigné par Lamarck (1744-1829), n'est pas considérée comme insecte puisqu'elle dispose de 8 pattes au lieu de 6 ; et croyez bien qu'elle sait s'en servir ! (☺ Si vous n'êtes pas plus persuadé que cela, allez vous régaler avec la série animée « Minuscule » en DVD)

Ainsi, alors que je téléphonais d'une cabine téléphonique (à l'époque, il en subsistait encore…), lors d'une averse ; une fois celle-ci terminée, je vis resurgir dans le coin supérieur de ma cabine, à l'extérieur de celle-ci, une brave araignée qui s'affaira pour reconsolider sa toile…

Habituellement, les toiles d'Araignée adoptent un beau motif géométrique de Spirale et sont construites avec tout un art technique et une certaine dextérité et application pour en réaliser l'ouvrage…



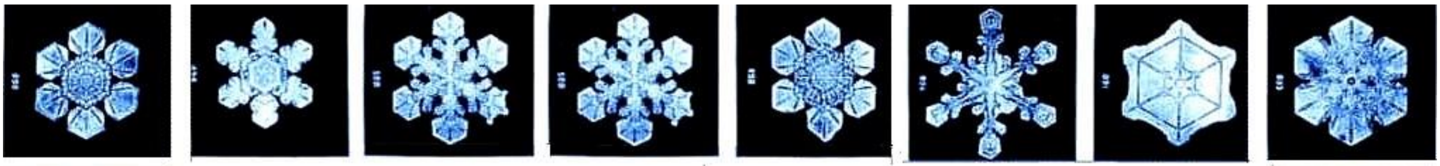
Construction d'une toile d'Araignée Epeire qui ajuste son Cadre puis construit les rayons puis une 1ère spirale et enfin la spirale gluante en retour

Mais l'Araignée qui sait aussi s'adapter aux contraintes de disposition de son milieu (ex : cabine téléphonique) ne pouvait guère occuper que la *surface d'un triangle rectangle* avec son siège d'observation disposé dans le sommet inférieur… Aussi, elle ramenait tous les rayons de sa toile en bas à droite puis patiemment effectuait des allers-retours pour fixer d'un point de colle sur chacun de ses fils son bout de Spirale…

Voilà que j'observe le manège suivant : l'araignée qui saisit de ses deux pattes Avant les fils de sa brassée de rayons convergents, et cela donnait… « un, deux, trois, un aller-retour…un, deux, trois, quatre, un aller-retour Un, deux, trois, quatre, cinq, un aller-retour… Un, deux, trois, quatre, cinq, six, un aller-retour…

L'araignée pour s'éviter des allers-retours inutiles était tout bonnement en train de compter ses fils !

Pour fêter l'hiver, les cristaux de glace se mettent sur leur « double trois »



Que voilà donc une jolie guirlande pour nous consoler des frimas !

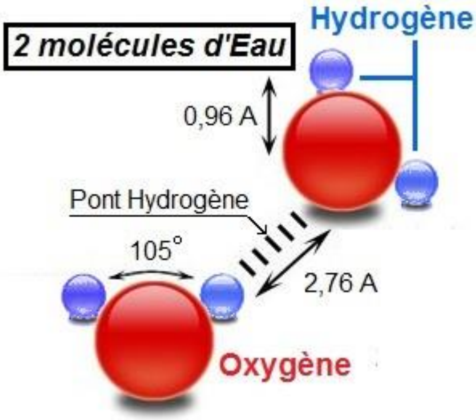
Alors que l'eau liquide nous semble de la plus grande banalité (et pourtant…), voici qu'elle adopte, une fois solidifiée par le gel, de multiples formes insoupçonnées à l'œil nu, et que va révéler un grossissement au simple microscope optique.

C'est ainsi que Wilson Bentley, né en 1865, réalisa patiemment, durant 40 hivers, plus de 5300 clichés photographiques, muni d'un appareil raccordé au microscope.

Que remarquons nous, hormis leur beauté ?

Que ces figures sont remarquablement géométriques ; et si elles adoptent la forme aussi bien de plaquettes sectorisées que d'étoiles, voire leur combinaison…une même constante revient : le chiffre six pour l'hexagone ou le nombre de branches

Pourquoi donc le Chiffre Six ? Mais parce que en effet il est obtenu par le « double Trois » !

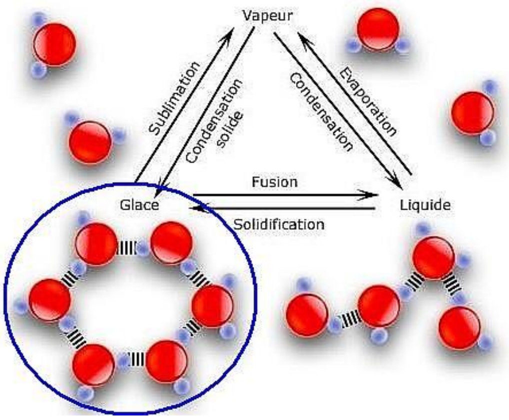


Et le Trois désigne le nombre d'atomes contenus dans la molécule d'eau (alors elle, visible uniquement au *microscope électronique* à effet tunnel), soit un atome d'Oxygène (représenté ici en rouge) et ses deux petits acolytes, atomes d'Hydrogène (en bleu clair) ; simplicité dupeuse puisque la molécule d'eau est tout sauf banale !

Vous remarquerez que la disposition des atomes d'hydrogène adopte un angle relativement précis de 105° autour de l'atome d'Oxygène (*par ailleurs la lettre A désigne l' **A**ngström = un dix milliardième de mètre)*

Les molécules sont libres de mouvement mais celle de l'Eau a de plus la particularité d'être fortement ***bipolaire*** comme un aimant :

côté **Hydrogène** **+** et
côté **Oxygène** **–**

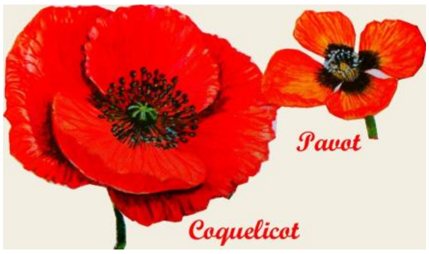


Comme les + et – s'attirent, de petits «ponts» s'établissent pour assurer notamment une cohésion à la glace, à l'état solide. Comme la température est synonyme d'agitation, tout s'écroule *ou presque* à l'état liquide devenu plus compact *(C'est pourquoi une même quantité d'eau prend moins de place à l'état liquide que solide)*

Ces ponts sont les « ***Liaisons Hydrogène*** ». Elles demeurent dans l'eau liquide, mais plus souples et peuvent « casser ».

Ainsi, pour minimiser les énergies de liaison à l'état solide, et compte-tenu de leur disposition spatiale, les molécules d'eau s'assemblent en hexagones…

Des fleurs qui se veulent belles et…ordonnées



Or, il existe tout de même des <u>contre-exemples</u> à cette fameuse énumération 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,…puisque notre cher ***Coquelicot*** (de la famille des … « Pavots » !) compte 4 pétales, tout comme la petite ***Véronique*** (qu'il ne faut pas confondre donc avec le myosotis à 5 pétales) ou encore la *fleur de seringa*…

Il existe également quelques exemples d'anémones à 6 pétales … Mais il est vrai que la grande <u>majorité</u> des petites fleurs en comprennent <u>plutôt 5</u>

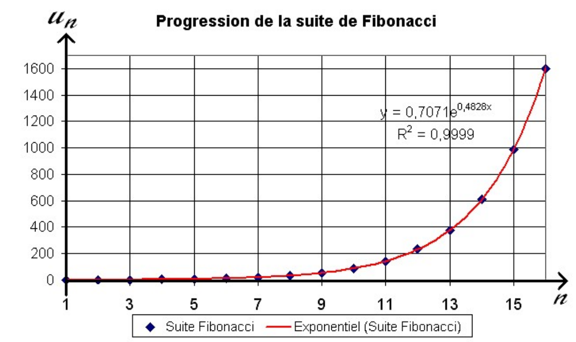
- Alors pourquoi cette fixation sur l'énumération précédente ?

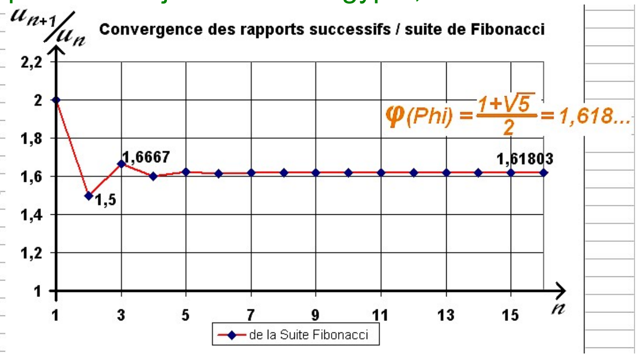
Car elle fait référence à la fameuse suite de **Fibonnaci** (également appelé Léonard de Pise) (~1175 ~1250) qui eut notamment pour mérité de faire connaître les mathématiques arabes et encourager la pratique des chiffres indo-arabes bien plus commodes que les chiffres romains usités jusqu'alors.

Cette suite a pour particularité de voir ses triplets successifs vérifier la relation : $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$

Vérifions-le : par exemple : 3 = 2+ 1 … 5 = 3 + 2 … 8 = 5 + 3… 13 = 8 + 5 … 21 = 13 + 8… etc, etc…

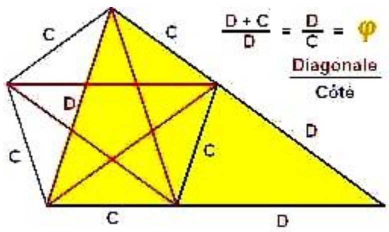
Or, pourquoi cette suite s'est avérée <u>devenir célébre</u> au fur et à mesure des siècles, notamment au cours du précédent écoulé ? C'est que les rapport des éléments successifs tendent rapidement vers la valeur du nombre φ (en hommage à « φδιασ » **<u>Phi</u>dias** (~-490 -431) qui dessina le Parthénon selon une proportion jugée très esthétique – recourant donc au rapport de φ, qui…était déjà connu en Egypte, un millénaire avant !)





Comme ce nombre φ a été appelé le nombre d'Or (!), il est redevenu très à la mode depuis un siècle, et on aurait tendance à le voir caché puis… révélé un peu partout dans la nature, la société…

Par exemple, je peux vous affirmer que, suite à ma remarque sur le nombre le plus courant de pétales pour les fleurs étant de 5, ces fleurs peuvent se rapprocher d'étoile à 5 branches inscrite dans un … pentagone régulier, figure à cinq côtés dont le rapport de chaque diagonale sur un côté vaut… le nombre d'Or ! (En fait, c'est tout simplement… mathématique !)
Donc, vous comprenez qu'on n'a cesse de déceler le nombre d'Or…partout !



- Pour en revenir aux fleurs et aux plantes en général, il s'avère qu'une discipline, faisant partie de la Botanique, s'intéresse à la <u>disposition des feuilles</u> autour des tiges, notamment leur pousse alterne ou non, et leur <u>répartition angulaire</u>, …

Cette discipline se nomme Phyllotaxie qui signifie étymologiquement « arrangement ou ordre des <u>feuilles</u> »…

☺ Sans nous avancer de trop, il semble bien que les plantes prennent leur disposition au mieux pour recevoir le maximum de lumière pour leurs feuilles en évitant de se faire de l'ombre à elles-mêmes !

Restons dans les plantes et abordons…

L'équation du Nénuphar

De quoi parlons-nous ? De la faculté pour l'espèce de plante aquatique du Nénuphar (*famille des Nymphéacées*) de coloniser assez rapidement l'étendue d'un étang…

Pour simplifier : « une colonie de nénuphars peut doubler de surface chaque jour »

Or, nous avons vu l'exemple d'une « progression géométrique » tout juste au chapitre précédent, avec la suite de Fibonacci puisque celle-ci peut être approchée par une courbe qui ne fait que croître de plus en plus vite selon une courbe « exponentielle » : toute fonction d'une grandeur X placée elle-même en « exposant » ou <u>puissance</u> …

Le fait de « doubler de surface tous les jours » peut s'écrire ainsi mathématiquement : $\boxed{S = S_0 \times 2^x}$

Ici, S désigne la Surface atteinte au bout de x jours, à partir d'une surface S_0 à l'origine, après avoir doublé chaque jour (d'où la valeur 2 présente dans l'équation ou égalité)…

Ne confondons surtout pas x^2 avec 2^x car cette dernière évolution progresse nettement plus vite !
Exemple au bout de 10 jours : $10^2 = 10 \times 10 = 100$ alors que l'équation qui nous concerne va s'écrire dans le même exemple de jours … $2^{10} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (2 compté 10 fois) = 1 024 !

En fait, la croissance de surface est fonction de la surface elle-même atteinte chaque jour, et non pas simplement en fonction du nombre de jours qui représentent les abcisses, ce qui explique son expansion…

(C'est le même principe pour les « intérêts » composés : les intérêts produisent eux-même des intérêts ☺… si par ailleurs les conditions sont restées inchangées ☹ hum…)

- Que se passe t-il à la fin de l'histoire pour la famille du Nénuphar ? Et bien, il … crève… Oui, car il a épuisé l'étang et ses ressources en Oxygène et autres sels minéraux…

Que doit faire le jardinier ? Prendre des dispositions (!) pour enrayer « la machine »… Or il lui faut 7 jours pour que son action opère… Question : quelle surface atteinte 7 jours au plus tard avant doit décider de l'action ?

Alors, pour en revenir à la confusion que justement la plupart des gens font, si vous les interrogez, la plupart d'entre eux vont vous *diviser la Surface par 7* (!) alors qu'il faut la diviser par 2^7 soit donc par 128 (de la même manière que si vous leur dites « en 30 jours , les nénuphars occupent toute la surface, au bout de combien de jours ils en occupent la moitié ? » ils vous répondront 15 jours (!) alors que la réponse est « la veille » …

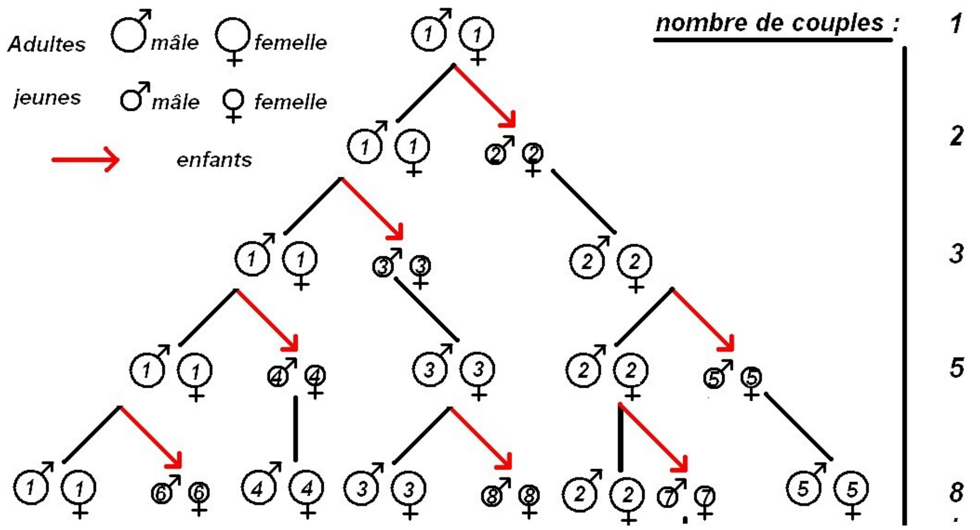
Voilà ce qui se traduit en résumé par « On a bien le temps d'agir… » Et bien Non, on n'a pas le temps !

Cette histoire de surface doublée chaque jour semble un peu extrême : c'était juste simplement plus parlant que d'évoquer la division cellulaire des microbes (invisibles à l'œil nu jusqu'à… ce que le malade en meurt !)

Comme autre type de reproduction, nous avons la division sexuée qui prend bien sûr un peu plus de temps, certes, mais qui peut également donner lieu à des résultats surprenants si on laisse faire les choses…

- Figurez-vous que justement Fibonacci s'est intéressé à la reproduction des lapins pour trouver sa suite…
  En effet, étant donnée sa réputation grandissante, les seigneurs de l'époque le sollicitèrent pour différents problèmes pratiques et intellectuels à vocation pédagogique…

  Ainsi sont posées les hypothèses suivantes :
  Un couple de lapins adultes (mâle et femelle donc) va engendrer tous les mois une paire (mâle et femelle) de petits dont la maturité sexuelle sera atteinte au bout de deux mois avant d'engendrer à leur tour des paires de petits, etc…
  Quelle sera l'évolution de la population de lapins au bout de tant de mois ?
  Rien de tel qu'un graphique…



  Soit un couple-paire de lapins, puis deux, trois, cinq, huit, etc…Cela donne la suite bien connue désormais C'est bien une progression géométrique ou exponentielle comme le montre le 1er graphique de la page 2
  Certes, elle augmente un peu moins vite que la division cellulaire puisque cela donnerait ~ $1{,}62^x$ contre 2^x

- De la progression sexuée des lapins à celle des hommes, oserait-on dire qu'il n y a qu'un pas ?… Non !
  - La 1ère différence serait bien sûr le délai de reproduction (un an minimum pour les couples adultes…)
  - l'âge de maturité sexuelle ou plutôt nuptial (/ vie sociale), situé entre 15 (voire 12) et 20 à 30 ans…
  - la mortalité qui vient compenser les naissances…
  - tous les facteurs extérieurs(culturels, cultuels, environnementaux) qui corrigent le taux de croissance…

Tout ceci explique que si dans les phases de pleine croissance démographique humaine, ce taux de croissance corrigé peut être compris entre 1% et 3% – ce qui donne une progression en $1{,}01^x$ à $1{,}03^x$ – dans le meilleur des cas… cela doit s'amortir de gré ou de force car… « ***le meilleur » ? C'est à voir…***

Quelle population pour quelles ressources sur Terre ?

Comme nous l'avons vu au début de la page précédente pour l'équation du Nénuphar, l'évolution d'un phénomène exponentiel comme la variation de population se traduit par une variation (ici la croissance) qui dépend directement de la population elle-même au lieu d'être simplement reliée au temps qui passe…

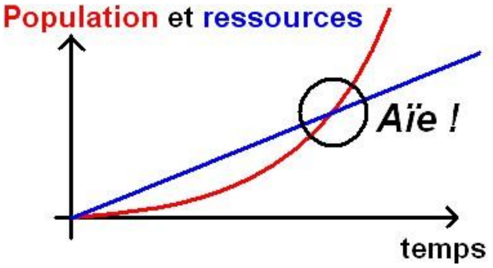
N la population et t le temps (années), associés à leur variation respective dN et dt ; Tc taux croissance (%) :

$$\boxed{dN = Tc \times N} \times dt \iff N = (1 + Tc)^t$$ telle la formule précédente

Ceci explique dès lors comment a t-on parlé (depuis les années 1950) d'« explosion démographique »

Parmi les premiers à nous avoir mis en garde face à un phénomène similaire dans le passé, figure au premier rang Malthus (1766-1834), pasteur et économiste anglais qui avait montré en son temps : « la tendance constante de tous les êtres vivants à accroître leur espèce plus que ne le permet la nourriture disponible ».

De cette « loi naturelle » il concluait au danger de surpopulation du globe et il préconisait simplement la limitation des naissances par la chasteté et le recul de l'âge du mariage. **Point !**

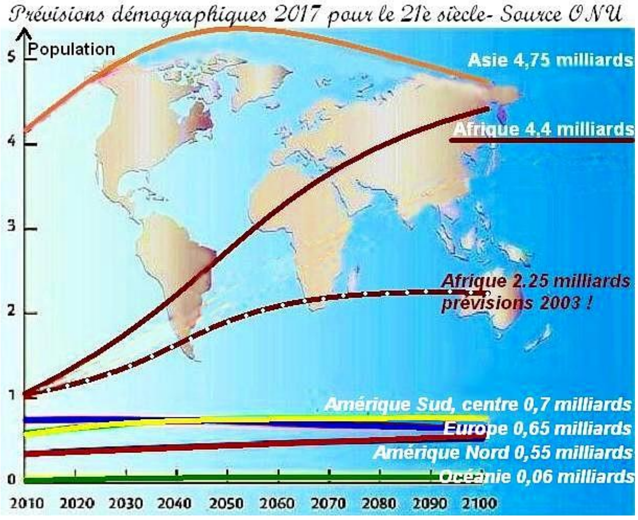


Car des doctrines sont allées, en son nom, prôner toutes les mesures possibles de contraception – auquel en son temps il était opposé –, voire adopter des mesures radicales qu'elles soient biologiques (en Inde, on prôna la Castration !) comme politiques…

Quoiqu'il en soit, de nombreux travaux et modèles furent proposés, comme celui de Verhulst (1804-1849), pour tenter de tenir compte des facteurs extérieurs comme la densité maximale admissible de Population ou la recherche de confort ou choix de vie pour les nouvelles générations :

$$\boxed{dN = (n - m) \times N \times \frac{K - N}{K} \times dt}$$ avec r = (taux de natalité – mortalité en %) et K saturation de N

Prévisions démographiques 2017 pour le 21è siècle- Source ONU

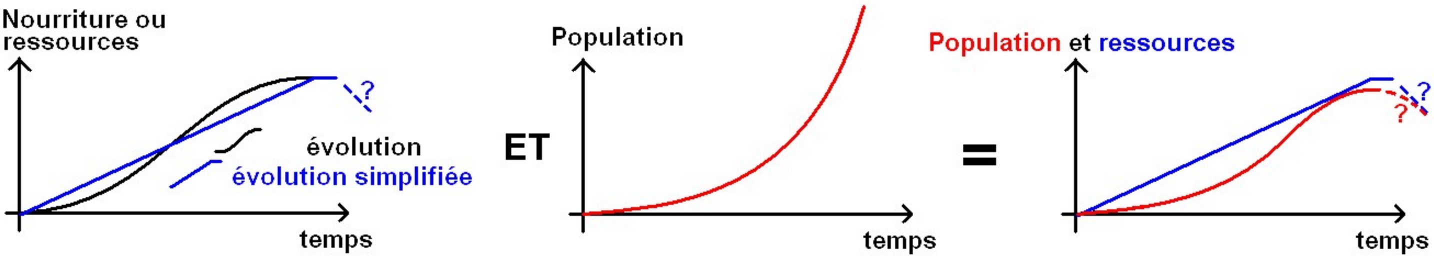


Malgré des « raffinements » de modèles démographiques, cela n'a pas empêché les prévisionistes de devoir sans cesse corriger leur tir, comme le montre l'illustration avec le cas notamment de l'Afrique – notamment Afrique noire – qui elle, s'avère être une véritable bombe démographique !

C'est sûr, pour paraphraser Pierre DAC, qu'il est plus facile de faire des prévisions pour… le Passé ☹

En fait, il serait bon d'accorder un peu plus de crédit aux facteurs liés à la crainte de l'avenir (exemple : certaines coutumes interdisent la répudiation uniquement pour les femmes enceintes, du coup…) qui engendrent des tensions démographiques, par compensation irréfléchie certes, mais compréhensible ; ou mieux lutter contre les transnationales qui détournent le « Bio » ou autres dons à leur seul profit.

Il faut beaucoup, encore et encore, de l'éducation pour tenter de faire passer le message suivant :



Car effectivement, les ressources ne sont pas extensibles à l'infini et il est nécessaire de les gérer au mieux, en ne les gaspillant pas pour l'intérêt et le profit de quelques uns, aux détriment de tous les autres.

Les ressources sont celles que nous fournit la Terre, depuis son sous-sol jusqu'à l'eau et l'air au dessus, en passant bien sûr par ce qu'elle accepte de fournir durablement par son sol et les êtres vivants qui y habitent…

Car sinon, non seulement, nous assistons à la disparition de la Biodiversité et à l'épuisement des ressources, mais nous nous étouffons et nous nous détruisons nous-mêmes.

Voyons pour la suite comment tirer au mieux parti par exemple des énergies exploitables sur Terre…

Les ressources sur notre Terre : et si on y incluait le Bon Sens ?

L'exploitation des ressources terrestres fit un grand bon avec l'avènement de la machine à vapeur …

Ce n'est pas seulement le Charbon qu'on alla retirer des entrailles de la Terre pour en faire de l'énergie à tout faire, c'est aussi le travail des pauvres et des enfants qu'on exploita (relire simplement Dickens (1812-1870))

Dès lors, on parla de « ressources » minières, où le Fer tenait la 1ère place après le Charbon, car il allait être désormais transformé en Acier, avec l'aide des haut fourneaux, pour alimenter le nouveau secteur de l'Industrie (même l'Agriculture multimillénaire a fini par devenir industrielle en à peine un demi-siècle) …

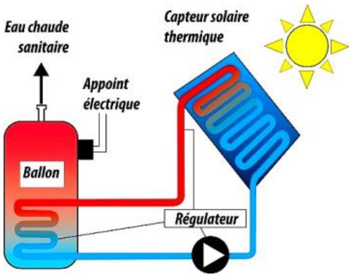
Après le Charbon, le Pétrole, puis l'Uranium pour les centrales nucléaires qui prirent le relais pour produire toujours plus d'électricité qui, désormais devra faire appel aux « métaux rares » pour produire les batteries et autres panneaux photovoltaïques utiles aux « énergies vertes » « bonnes pour la Terre »…

(Cela doit être vrai puisqu'on arrête pas de le vanter dans les « bizenesse Plans » ☺)

Donc pour tout çà, faut de l'énergie, toujours plus *– et beaucoup de sous –* et, on semble redécouvrir depuis peu les « énergies renouvelables » comme s'il en pleuvait d'un coup, et le Soleil au dessus de nos têtes…

Car, quelle est la principale source d'Energie sur Terre ?

➢ « Le Soleil ! » les plus experts répondront, puisque le Soleil, en dehors de ses rayons, commande aussi les vents, le cycle de l'eau transformée en vapeur qui retourne aux sources, la biomasse, la géothermie…



Rappelons d'ores et déjà qu'avant le Solaire photovoltaïque, il y a tout bonnement le Solaire thermique qui chauffe l'eau ou cuit les aliments

Remarquons qu'il n'y a pas besoin, de surcroît, de débauche de technologie pour tirer parti du Soleil, du « système D » fait très bien l'affaire (exemple : une vitre et fond noir pour capter les calories) et économise de plus de la matière…

Il y a encore mieux que ça ! La source essentielle d'Energie est celle… non consommée **qu'on économise** !

Rappelez-vous en 1974, après le 1er choc pétrolier, le slogan de l'ADME (Maîtrise de l'Energie), qui deviendra plus tard l'ADEME : « La France n'a pas de Pétrole, mais a des Idées ». A se demander d'ailleurs où sont passées ses idées puisque de nos jours, à l'heure de la « Comm' » cela semblerait être devenu :

☺ « On sait plus faire !…Mais on s'fait fort d'vous plaire… » ☺

➢ Deux voies sont alors à exploiter pour économiser l'énergie ; elles s'avèrent en fait complémentaires :

1. L' « **Efficacité** » énergétique qui consiste à augmenter les rendements des machines de conversion d'énergie et à user d'une énergie moindre pour rendre les mêmes services ?

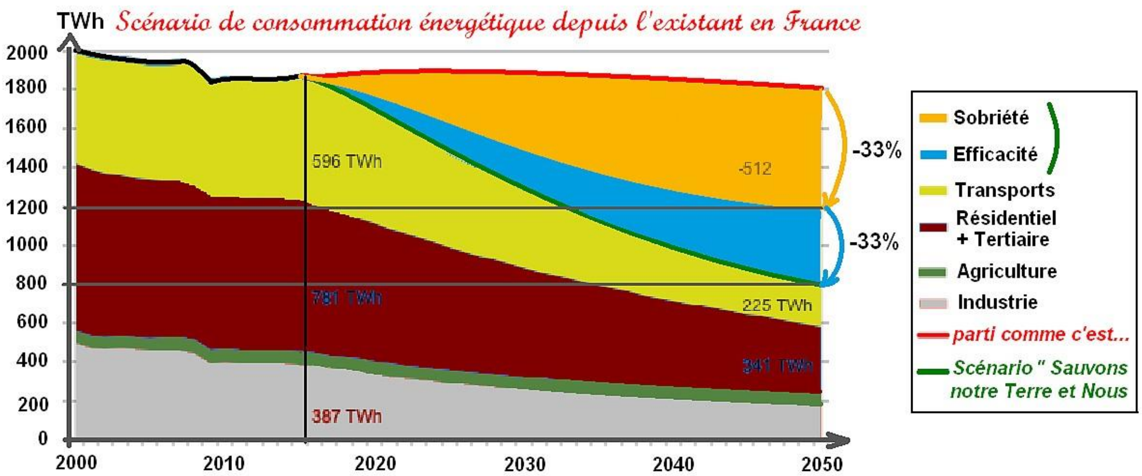
   Cela nécessite toujours des études approfondies et des investissements qu'on espère toujours « amortir » dans des délais raisonnables. Cela concerne aussi bien l'Industrie et les Transports avec l'emploi de machines et moteurs toujours plus efficaces que l'Habitât mieux isolé contre les déperditions d'énergie…

   Elle est toujours mise en avant, puisque censée être génératrice d'emplois, de revenus, etc…– mais aussi source de gaspillages si c'est promu à la va vite, sans véritable contrôle – Là aussi, discours bien rôdé…

2. La « **Sobriété** » énergétique qui est…tout aussi efficace (!). En définitive devrait être placée en tête puisqu'à la suite, l' « Efficacité énergétique » le serait d'autant plus que la moitié du travail serait accomplie avant l'heure… C'est en réalité nettement plus abordable et le seul investissement est de la « Jugeotte »

Voici ce qui pourrait être projeté et accompli en France d'ici 2050, tant qu'il est encore temps !

Çà fait 40 ans que des experts vous pondent des études Ici le Scénario 2017 «NégaWatt» (ajusté pour bien montrer le rôle de la Sobriété avant l'Efficacité !



De la Sobriété et… de la Joie

- Est-ce que faire preuve de Sobriété est forcément se priver ou se rendre malheureux ? Mais Non !
  Et même si se priver consiste en fait à se désencombrer, « s'alléger »…Y aurait plutôt d'la Joie à le faire !
- Est-ce que refuser certains « progrès » vous fait revenir « à l'âge des cavernes » ? Dans ce cas-là, diriez-vous que vos parents ou grands parents vivaient à l'âge des cavernes ? N'est-ce pas leur faire injure ?
- Est-ce que la Sobriété est néfaste à l'Economie ? Parce que faire de l'argent pour consommer à tout va et mieux polluer notre Terre, puis en faire à nouveau pour la dépolluer ensuite, est-ce de la belle Economie ?

Hommage à Théodore Monod le Naturaliste et Humaniste (1902-2000)

En fait, toutes les allégations pour discréditer la Sobriété sont démontables une par une, mais à quoi bon se justifier auprès des sceptiques et des « sourds »par refus d'entendre…Agissons pour nous-même !

1. Exemple de sobriété en dépenses de chauffage … Prenons un cas concret…le mien !

Je suis rentré dans mon appartement – deux-pièces dans l'Ancien , en Juillet 1994 – et fis l'acquisition d'une chaudière individuelle à Gaz… (toujours la même en 2019 alors qu'on me prédit sa fin imminente il y a 10 ans)

Sans plus de façon, j'utilisai celle-ci tout au long de l'année, pour le chauffage et l'eau chaude en cuisine et me retrouvai avec une consommation de 8800 kWh les premières années (près de 800 m3 de gaz environ). Cela ne me choqua pas plus que cela, car en tant que locataire d'« une pièce », j'étais déjà à 200 kWh/m²/an

Jusqu'au jour où GDF, racheté progressivement par Suez, avant de devenir plus tard … « Engie », se mit à augmenter pour un Oui ou un Non ses tarifs… Je prêtai assez vite des moyens d'agir dont je disposai :

- Un vieux Thermostat que je ne croyais plus fonctionner, installé dans la pièce du Salon, mais qui s'avérait être simplement déréglé d'environ…4 °C (!) ; il suffisait de le décaler d'autant pour qu'il commence à remplir son office de régulation … Gain de 1000 kWh la première année de vigilance
- L'observation journalière ou presque de mon compteur de Gaz pour surveiller ma consommation : second gain dans la foulée de 1000 kWh l'année suivante…
- Suppression de l'eau chaude en cuisine *(c'est d'ailleurs ce qui explique la longévité de mon ancien modèle de chaudière désormais moins sollicitée pour un Oui ou un Non)…* L'eau de cuisson peut faire l'affaire… 700 kWh furent trouvés et doublés de surcroît par l'interruption de la chaudière durant 6 à 7 mois du coup : En effet, ce vieux modèle dispose d'une « veilleuse » qui consomme 12 à 15 l de Gaz à l'heure (bof ?) mais 12,5 l/h × 24 h × 200 j = 60 m³ de gaz × 11,15 kWh/ m³ = environ 670, soit ~700 kWh, total 1400 kWh
- Interruption du chauffage la nuit et dans la journée… *Suffit de rajouter une couverture et un Cache-Col…* compensée par un petit coup de chauffe le matin et un plus sérieux le soir… Cela consomme moins au bilan journalier qu'un ralenti permanent 24h sur 24 ; et ça été corroboré par un Calcul énergétique *(je suis ingénieur énergéticien)*… La consommation précédemment ramenée à 5400 kWh a baissé à 4000 kWh…

- Pourquoi deux degrés de moins en température ambiante peuvent-ils économiser 20% de nouveau ?
  Parce que la température moyenne en début de soirée est de 9°C durant les hivers derniers, alors 17°C intérieur(au lieu de 19) – 9°C = écart de 8°C à « rattraper » au lieu de 10°C, soit 80% d'où 20% économisés…Je vous rassure, je suis le seul qui sois concerné par ces efforts… Je ne suis pas un « bourreau d'enfants »…

Epilogue : J'ai encore du faire du zèle et profiter peut-être d'un hiver plus clément, il y a trois ans, car mon record de sobriété à battre est de … 2700 kWh à l'année (-70% par rapport aux 8800 kWh initiaux !)
Est-il besoin de préciser que je n'ai changé ni fenêtre, ni porte, ni fait d'isolation « dans les règles »… ?

Certes, il ne s'agit pas que tout le monde se mette à un tel régime, mais tout de même, économiser ne serait ce qu'un tiers de chauffage – lorsque celui-ci est individuel – simplement en faisant attention, vous semble t-il plausible désormais ? Par ailleurs, je ne paye pas plus cher en € ma facture de Gaz depuis 2002, malgré les augmentations de tarif plus que conséquentes (Désolé pour les actionnaires d'Engie ☹)

2. Economie du même ordre dans l'usage d'une voiture

Un français moyen effectue au plus 15 000 km/an : sachant qu'il peut économiser 3000 km en supprimant tous les petits trajets (d'ailleurs néfastes à la longévité de la voiture) marcher à pied ou faire du vélo…puis conduire avec un pied plus léger et « anticipatif » … au bas mot 1/6 d'économisés en l/100 km…

Nouvelle consommation = 12 ~~000~~/15 ~~000~~× (1 - 1/6) = 12/15 × 5/6 = 4/~~5~~ × ~~5~~/6 = 4/6 = 2/3 de l'ancienne

Bilan de Sobriété immédiat pour deux secteurs importants en dépenses d'énergie :

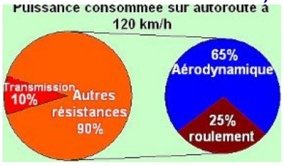
Sobriété ► -33% d'Energie

Pour optimiser l'efficacité énergétique : dessiner des cercles vertueux…

Abordons cette fois-ci le secteur des transports pour expliquer les principes qui favorisent, dès la conception, les économies potentielles d'énergie quelle soit thermique ou… électrique (l'avenir paraît-il !)

Ainsi, une automobile lutte en permanence contre son inertie du fait de sa masse, et toutes les autres pertes d'énergie liées à l'air qui fait obstacle (résistance aérodynamique), ses pneus au sol (le roulement), et tous les frottements internes entre les pièces mécaniques (ou les fluides et gaz dans une moindre mesure).

Pour fixer les idées, sur un cycle de conduite (ville et route) où l'on accélère, ralentit, freine, roule à plus ou moins grande vitesse, la masse est la principale responsable de la consommation – pour environ les deux tiers ; mais à l'inverse, sur autoroute c'est cette fois la résistance de l'air qui en prend les deux tiers ►



Pour lutter contre cette consommation, on a demandé aux motoristes de faire… des prodiges ! En effet, pensez que si vos voitures ne consomment que *6 ou 7 ou 8 litres de carburant aux 100 km* ; c'est que le rendement énergétique des moteurs a doublé depuis les années 30 (celles de la Citroën Traction AV) au point d'atteindre pour certains d'entre eux celui des turbines à gaz des centrales nucléaires !

Mais du coup, après les deux chocs pétroliers des années 70, on a oublié (avec les années « fric ») depuis trente ans quasiment ce qui est le B A BA des économies d'énergies : concevoir léger et aérodynamique et compact – *Hélas, on semble adopter plutôt le comportement des vendeurs de TV de bientôt deux mètres d'écran sous prétexte de technologie « ultra-économe »* (« Oh zut la facture EDF ! »☹)

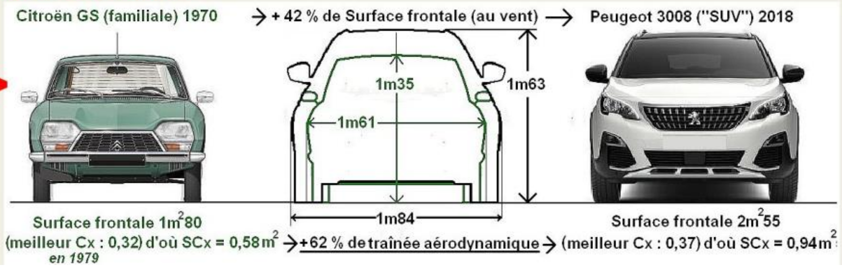
< Au lieu de passer de la GS des années 70 à la "Dream car" révélée début des années 80 >

. . .

On se retrouve trente ans plus tard avec … un Mammouth

< monté sur roues

>>



Donc avec les moteurs actuels, on n'aurait consommé que 3 litres/100 km avec la «Dream Car» concrétisée…

Les voitures sont elles plus lourdes à cause de la Sécurité ? Non**, puisque la Sécurité n'implique que 20% de la masse des voitures… Cherchez plutôt du côté Suréquipement (manque bientôt plus que le «Jaccouzi») qui alourdit la voiture et nécessite des moteurs plus gros puis des caisses plus lourdes…**Cercles vicieux !!…

Comment engendre t-on des cercles vertueux ? En remettant les choses à plat et en faisant mouliner son cerveau avant de croire que les mêmes « progiciels » du Marché puissent faire le boulot à votre place…

Exemple de Conception systémique pour un avant-projet de voiture :

Après avoir déterminé (avec votre cerveau aidé au besoin d'une «calculette») quelles sont les interactions entre les différentes composantes de votre voiture, cela donne cet enchaînement de boucles vertueuses…
*(Comment nous rendons une Renault Zoé électrique… de **1500 kg (!!)** (/ 300 kg de batteries) plus vertueuse !)*

masses Mq:Equipement + Mc:chassis + Ms:Trains&Organes + Me:MotElec + Mb+:Batteries&berceau = M totale

<interactions suivantes> : [Mc + Ms + Me] = (1/5 + 1/6 + 1/30)×MT = 2/5×MT ; Mb+ = 4/3×Mb qui dépend de E

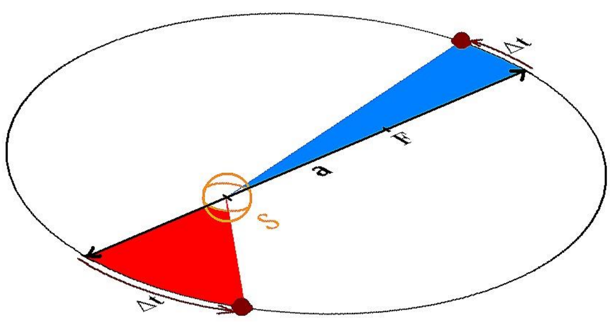
Mq + 2/5 × MT + 4/3 × Mb = MT d'où Mq + 4/3 × Mb = 3/5 × MT soit MT+ = 5/3 × Mq + 20/9 × Mb + 100

Conducteur+

(kg) Mq	Mb	MT	Aéro	+ roulement	= Energie totale (joules)
500	300	1500	285	96	381
260	300	1100	182	72	254
260	200	877	176	58	235
250	185	827	175	57	232
248	181	815	175	55	230

V moy. 80 km/h

Moins de matières et matériaux à produire et recycler, moins d'Energie, **la Terre vous dit « Merci »**


Δt
F
a
S
Δt

Mathématiques et Physique ensemble

Et ces deux disciplines progressèrent mutuellement…

Nous avons vu, au 2ème épisode, comment les hommes, après avoir admiré voire compté (!) les étoiles, se mirent à les repérer avec l'Astronomie ; dès lors, les premières mathématiques élaborées s'ensuivirent :

1. la Trigonométrie, initiée par les savants indiens, précieux outil de repérage, et plus encore…
2. La Géométrie formalisée par les penseurs et mathématiciens grecs qui en firent usage pour mieux appréhender le monde dans lequel se développait… la Société des hommes .

Rappelons que « Mathématiques » signifie « Ce qui s'enseigne et qui s'apprend » (ou vice-versa !? ☺)
Nous voyons là comment les Mathématiques furent d'abord au service de la Science (ou « Savoir ») et nous allons voir comment elle se mit à progresser conjointement avec la maîtresse science : la Physique.

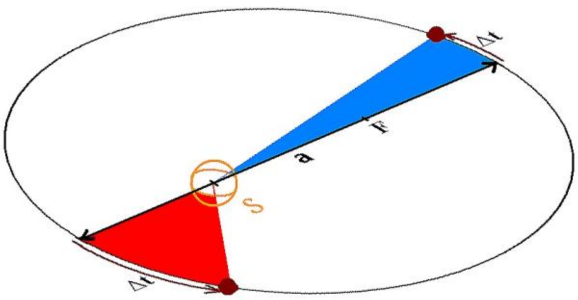
Renaissance de l'Astronomie avec l'initiation de la Mécanique céleste…

Après un certain engourdissement au cours du moyen âge, la science astronomique se réveilla peu à peu, à la suite d'une audace intellectuelle dont fit preuve – néanmoins avec prudence puisqu'il ne la fit révéler que dans son testament – Nicolas Copernic (1473-1543) qui remettait le Soleil « au centre du Monde », et qui permit de simplifier les calculs qui allèrent faire progresser cette science astronomique.

Tout d'abord, c'est le danois Tycho Brahé (1546-1601) qui entreprit une somme… « astronomique » d'observations systématiques et minutieuses de la voûte céleste, à l'aide d'instruments de mesure bien plus précis que par le passé. A sa mort, l'un de ses élèves hérite de ses travaux… : Johannes Kepler (1571-1630)

Celui-ci va alors se lancer à corps perdu dans une quantité innombrable de calculs qui vont lui faire aboutir à l'énoncé de trois lois (désormais appelées lois de Kepler) pour décrire le mouvement des planètes :

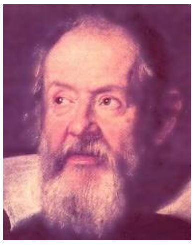
1. Les <u>orbites</u> des planètes sont des Ellipses – et non des cercles – dont le Soleil occupe l'un des foyers



2. La progression observée des planètes sur leur orbite respecte la « loi des aires » : les aires <u>balayées</u> par les <u>rayons vecteurs</u> allant du Soleil à la planète sont égales pour un même intervalle de temps Δt, *ce qui explique pourquoi la planète semble accélérer au plus près du Soleil et ralentir à l'opposé*
3. La durée de révolution $\mathbf{T}$ d'une planète est lié à la grandeur du grand axe $\mathbf{a}$ de son orbite elliptique qui respectent un même rapport $\mathbf{T}^2 / \mathbf{a}^3$ constant *soit encore ce qui revient au même :* $\mathbf{T} / \mathbf{a}^{3/2}$ *constant.*

Il restait cependant à trouver ce qui fait tourner ainsi les planètes autour de leur étoile telle le Soleil

… et Naissance de la Physique

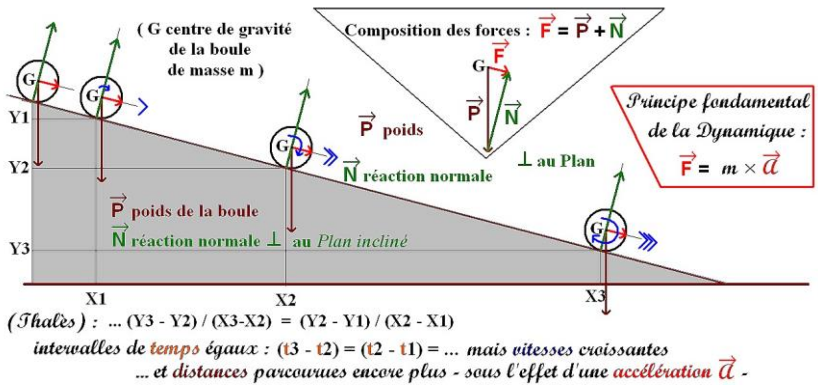


Cette Physique qui étudie les propriétés de la Matière et des phénomènes qui en découlent a pour «père» Galiléo Galilée (1564-1642), né à Pise (*comme Fibonacci quatre siècles plus tôt*). En effet, homme de science parmi les plus complets de notre histoire, il fut à la fois astronome et mathématicien, et fonda les bases de la physique sur l'expérimentation menée à son terme et validée pour en déduire des lois qui expriment la synthèse des résultats obtenus.

L'expérience célèbre qui le fit connaître, après celle de l'observation du mouvement des **pendules**, *balanciers et lustres (et non pas les aiguilles ☺ !)*, est celle de la chute des Corps…

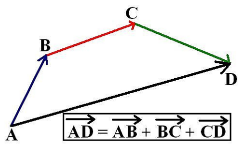
On lui prête même volontiers l'expérience menée au sommet de la *tour penchée de Pise* , mais sans doute cela fait partie un peu de la légende…

En homme pratique, il procéda plutôt à l'expérimentation basée sur l'utilisation d'un *plan incliné* pour de meilleures mesures des <u>distances</u> et des <u>temps de parcours</u>, en vue d'étalonner et comparer différentes chutes d'objets (ici, des boulets) et constater alors que :
les vitesses acquises, depuis le repos, sont les mêmes atteintes à une même hauteur, si l'on néglige la résistance de l'air…



- **Que nous dit le schéma du Plan incliné de la page précédente** ? *(Avec les compléments de formules qui viennent traduire l'ensemble des expériences et résumer leur interprétation ultérieure)*

1. Une boule au repos, libérée, prend progressivement de la vitesse : par conséquent : elle accélère !
2. *Cette accélération est la même quelle que soient les boule(t)s,* ici désignée par $\vec{a}$ surmonté d'une «flèche»
3. Qui cause cette accélération ? le Poids P de la propre boule auquel s'oppose la résistance N, « normale au plan » (ou «perpendiculaire au plan») qui va donc limiter cette accélération.
4. Cette accélération est proportionnelle à la somme vectorielle des efforts $\vec{F} = \vec{P} + \vec{N}$ Rappelons que cette <u>somme</u> vectorielle – voir 2ème épisode – résulte du formalisme adopté par la suite pour mieux représenter les efforts – objets dynamiques – et autres objets cinématiques – vitesses, accélérations – Ex : *3 vecteurs <u>sommés</u> en un 4ème…*



5. Hormis l'outil mathématique des vecteurs , quels sont les autres apports mathématiques ?

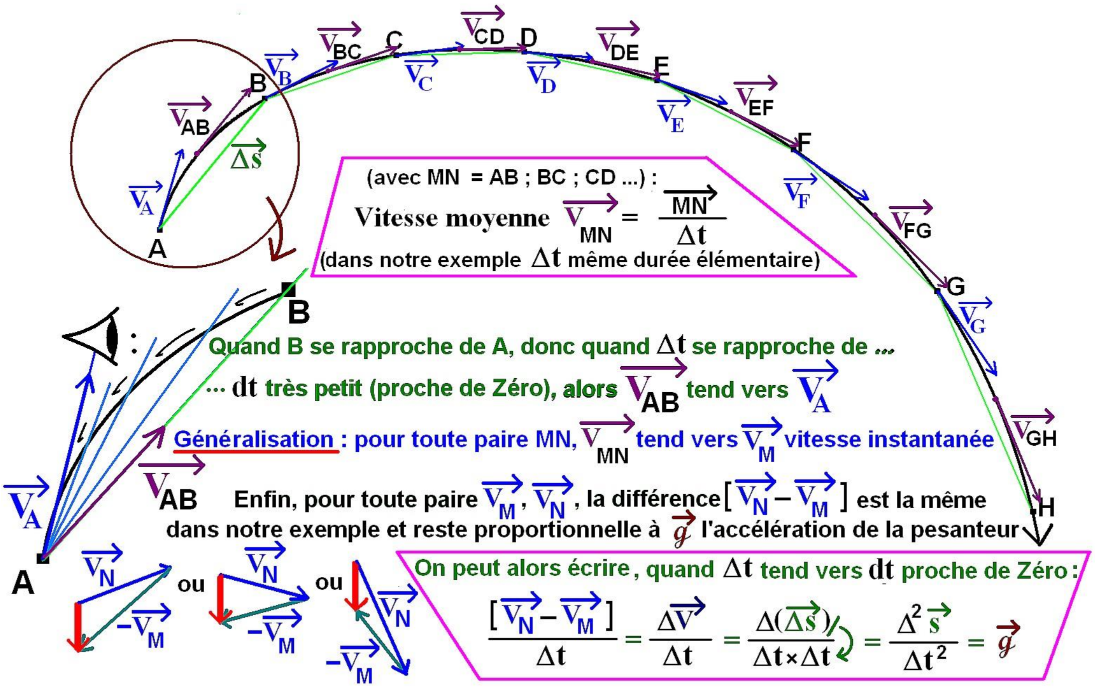
- Les mesures des distances assortie de celle du temps (le sablier *avant l'invention de la 1ère horloge à … <u>pendule</u> en 1675 par Huygens, suite aux observations de Galilée sur l'aspect régulateur des pendules*)
- Le théorème de Thalès (Oui, encore lui !) qui fait correspondre les distances parcourues sur le plan incliné à la référence du sol horizontal…
- La détermination des vitesses – *<u>moyennes</u> pour commencer* – par le rapport des distances parcourues aux intervalles de temps écoulé…

- La correspondance entre la Force résultante et l'accélération passe par une égalité – une équation – qui résume le «Principe fondamental de la dynamique» par $\vec{F} = m \times \vec{a}$ qui fait intervenir la masse m sous deux aspects confondus en un seul : « grave » (sous-entendue lourde, pesante, et qui donnera « gravité ») et « inerte » qui s'oppose au mouvement (qui donnera « inertie »)…

- Pour <u>bien appliquer cette précédente correspondance</u> - égalité, il faut que l'action soit située – repérée – dans un repère fondamental (qui sera appelé plus tard repère « galiléen ») dans lequel un corps ou solide non soumis à aucune force extérieure reste au repos ou conserve sa vitesse initiale uniforme, puisqu'il ne subit par correspondance aucune accélération – positive ou négative –

  Et par là même, est introduite la notion – bien avant Einstein des siècles plus tard – de relativité

  En effet, <u>par exemple</u> un objet immobile dans une salle de classe, ne l'est que relativement qu'en se référant à un repère lié à notre salle de cours – salle dans un «*immeuble*» sur notre Terre qui elle, tourne sur elle-même et autour du Soleil qui se déplace lui-même en direction relative vers l'Etoile Véga ☺!!! – et par ailleurs, notre Terre n'offre de repère galiléen que par approximation – certes suffisante –



Ainsi, on retrouve la trajectoire d'un corps ou solide, en extrayant les vecteurs vitesse et l'accélération si celle-ci est nulle (mouvement rectiligne uniforme) ou constante (mouvement uniformément accéléré) tel le graphique ci-contre :

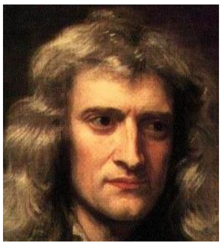
- Sur ce graphique, nous avons déjà remplacé l'accélération quelconque par → celle de la gravité-pesanteur : g

Ce qui explique la trajectoire incurvée vers le bas…

Par ailleurs, ce graphique commence à expliquer la notion de vitesse instantanée en un point, qui s'avère être la limite convergente de la vitesse moyenne entre deux points…

C'est alors que nous allons parler du – voire des – prochains savants qui ont fait faire un pas de géant, aussi bien à la Mécanique céleste, puis, par association et symbiose, aux Mathématiques même…

Le triomphe de la Mécanique céleste et de la Physique … mathématique



C'est tout d'abord bien sûr d'Isaac Newton (1643-1727) dont il est question. Celui-ci, né dans les «Midlands» de l'Est de l'Angleterre, va effectuer ses études puis accéder à la chaire de professeur de Mathématiques dans la célèbre Université de Cambridge.

Il fera par ailleurs partie, dès l'âge de 29 ans de *la Royal Society* de *Londres*

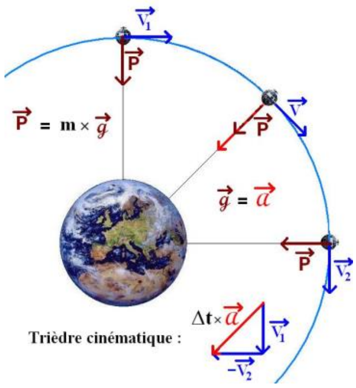
C'est en étant sollicité par l'astronome Edmund Halley (1646-1752), pour mieux exploiter les lois de Képler, qu'il va réaliser son œuvre majeure qui donnera lieu à la publication en 1687 de sa thèse (*Les principes mathématique de la Philosophie naturelle*).

C'est ainsi que Newton, sous le vocable de « Philosophie naturelle » concevait la Science, et en particulier la Physique censée expliquer les phénomènes liées à la Matière, grâce aux Mathématiques les mieux à même d'exprimer la vérité et la réalité du Monde… « *Aux mêmes effets, on doit assigner les mêmes causes* »

A partir donc, des lois de Kepler, Newton remonte à la cause première universelle qui explique le mouvement des planètes comme la chute des corps : la gravitation universelle : ***Deux corps quelconques s'attirent en raison de leurs masses respectives et de l'inverse du carré de la distance de leur centre de gravité***

La puissance de sa théorie permet de connaître la vitesse et la position relative de chaque corps – qu'elle soit Planète ou … Pomme à chaque instant donné.

Si la Pomme tombe, c'est attirée par la Terre beaucoup plus massive, et si la Lune – comme tout satellite – tourne autour de la Terre, c'est qu'elle … tombe également en permanence ; c'est sa vitesse de rotation acquise qui la maintient en équilibre « céleste » permanent.



L'accélération de la pesanteur terrestre vaut donc $\boxed{g = \mathcal{G} \times M_T / R_T^2}$ (masse et rayon terrestre) qui intègre ainsi la Constante gravitationnelle universelle $\mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$ = 6,67 10^{-11} N×(m/kg)^2 ; *N « Newton »* désigne désormais l'unité associée à toute force comme le Poids) La masse terrestre vaut ~ 5,98 × 10^{24} kg et le rayon terrestre moyen vaut ~ 6,378 × 10^6 m, et le g moyen 9,8055 arrondi à 9,81 m/s^2

- Puisque dans le cas de la révolution de tout satellite autour de la Terre, le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $\vec{P} = m \times \vec{g} = m \times \vec{a}$; $\vec{a}$ est donc une accélération « centripète » *(dirigée ainsi vers le centre de rotation, centre même de la Terre*) produite ou « dérivée » de la vitesse de rotation.

Newton échafaude une théorie rigoureuse de l'*Analyse mathématique* et recourt au *calcul différentiel* qui lui fait désigner « fluxions » désormais appelées dérivées en tous points ; il ébauche le *calcul infinitésimal*.

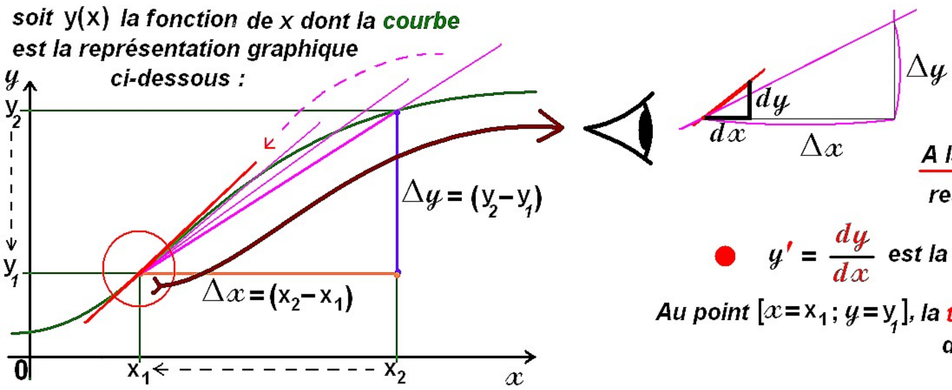
C'est alors une franche émulation et concurrence qui va avoir lieu avec cet autre savant et philosophe qu'est Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716), né à Leipzig, savant universel à la façon de Galilée mais tout aussi épris de métaphysique et spiritualité, tel Pascal (1623-1662).

Paradoxalement tourné vers l'ancien monde, attaché à la **scolastique** *(art médiéval d'enseignement de la philosophie*) il va néanmoins contribuer à insuffler de la modernité dans la discipline mathématique, ne serait-ce qu'au travers de ses notations et définitions.

Son esprit universel lui permet très souvent de procéder par analogies et relier ainsi différentes disciplines scientifiques (comme théologiques aussi bien).

Enfin, sa capacité de thèse, très attaché à « l'unité et le Tout » il va à la fois embrasser le calcul différentiel comme le calcul intégral, comme nous allons nous y intéresser…

La dérivée d'une fonction



$$y'(x_1) = \frac{dy}{dx}(x_1) = \lim_{x_1 \leftarrow x_2} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

A la limite donc, Δx et Δy deviennent respectivement dx et dy, infiniment petits

$y' = \dfrac{dy}{dx}$ *est la fonction dérivée de la fonction y*

Au point $[x = x_1 ; y = y_1]$, la tangente à la courbe est portée par la droite d'équation : $y - y_1 = y'(x_1) \times x$

Nous voyons donc avec le graphique précédent comment le calcul d'une dérivée est un calcul infinitésimal en sorte que, celui-ci s'attelle à la recherche d'un infiniment petit de la variation à la fois de x et de sa fonction y, représentés tous deux à l'aide d'un repère cartésien (pour rappel d'un tel repère, voir épisode 4).

- La dérivée de la fonction **y (x)** en un point M_1 de coordonnées (x_1,y_1) par exemple est notée $\mathbf{y'}(x_1)$
- *Rq : lorsque l'abscisse représente le temps, la notation sera par convention :* $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$

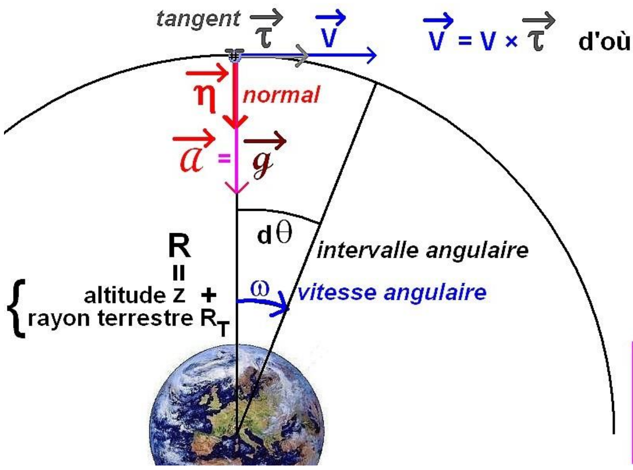
Revenons à notre exemple du Satellite qui tourne autour de la Terre :

Sa vitesse de Rotation est uniforme, tangente à sa trajectoire, et pourtant il y a existence d'une accélération qui doit égaler l'accélération de la pesanteur (à cette altitude plus faible en grandeur qu'au sol).

Comment cette accélération s'obtient-elle à travers la dérivation de la vitesse pourtant uniforme ?

Apparté : la dérivée d'un produit de fonctions **(u × v)'** est distribuée de la sorte : **u' × v + u × v'**

En se rappelant que la vitesse est portée par un vecteur tangent à la trajectoire, *vecteur qui subit aussi la « dérivation » par l'instrument puissant du calcul différentiel, (avec celle incluse du calcul de fractions)*, nous aboutissons alors à l'obtention d'une accélération **centripète** comme le montre le schéma ci-contre:



$$\vec{V} = V \times \vec{\tau} \quad \text{d'où :} \quad \boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V \times \vec{\tau})}{dt}}$$

V uniforme ne varie pas avec le temps

$$= \cancel{\frac{dV}{dt}} \times \vec{\tau} + V \times \boxed{\frac{d\vec{\tau}}{dt}}$$

$$= V \times \boxed{\frac{d\vec{\tau}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}}$$

$$= V \times \vec{\eta} \times \omega \quad \text{avec } \omega = \frac{V}{R}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{V^2}{R} \times \vec{\eta} = \vec{a}} \; (= \vec{g})$$

Application chiffrée :

Soit un Satellite tournant autour de la Terre à une altitude de 10 392 km : quelle est sa période de révolution ?

Les données sont : R_T moyen de la Terre = 6 376 km ; g = 9,81 m/s² au niveau de la Mer

Commençons par connaître :

1. la valeur de g à l'altitude du Satellite : plutôt que de tout calculer (avec la Cte universelle de Gravitation, etc…), observons que cette accélération décroît avec le « Carré » de la distance au centre de la Terre, par conséquent il suffit juste de poser g en altitude valant $\boxed{9{,}81 \times [R_T / (R_T + z)]^2}$ (Règle de trois)
   On trouve : $g = 9{,}81 \times (6\,376 / \ldots 16\,768)^2 \sim 9{,}81 \times 0{,}38^2 \sim 1{,}4184$ m/s²
2. puis la vitesse tangentielle du Satellite : nous utilisons pour cela la formule $V^2 / R = g$ soit à nouveau par règle de trois : $\boxed{V^2 = R \times g}$ en faisant attention à convertir $R = (R_T + z)$ en mètres soit 16 768 000 mètres
   L'opération donne pour V^2 23 783 731,.. dont on prend la racine carrée pour obtenir V = 4 876,85 m/s
   Adoptons V = 4,877 km/s

Il reste à poser que le satellite fait le tour de la Terre (à son altitude) avec cette vitesse, durant la Période T

Soit : $V \times T$ = un tour de $2 \times \pi \times R$ km donc $T = (2 \times \pi \times R) / V \sim 21\,600$ s converti en heures cela fait : 6 heures

Question subsidiaire beaucoup plus basique : combien de fois fait-il le tour de la Terre en 24 h : Réponse : 4

Question plus subtile : Combien fois de fois par jour les observateurs le voient passer au dessus de leur tête ?

- ***S'il tourne autour des pôles : 1 fois au mieux***
- ***En Latitude, dans le même sens de rotation de la Terre : 3 fois (puisque la Terre rattrape un tour)***
- Idem mais en sens inverse de celui de la Terre : 5 fois à la fin d'un cycle de 24 heures

Bon eh bien maintenant vous devriez être parés pour calculer l'âge du Capitaine qui pilote le Satellite ☺…

Vous vous imaginez mieux à quoi put servir la théorie de la Gravitation, et tous ces « petits calculs de base », pour envoyer le premier… « Spoutnik » en l'air ! D'autant plus qu'ils se contentaient de la Règle à Calcul…

(Règle à Calcul que nous aborderons dans un autre épisode, d'ailleurs)

L'intégrale d'une fonction ou l'art de calculer une Surface

Après le calcul différentiel, les mathématiciens n'allaient pas s'arrêter en si bon chemin avec les ressources que leur fournissait le calcul infinitésimal : à commencer par l'intégration d'une surface située sous la courbe représentative d'une fonction ; ils passèrent donc au calcul intégral d'une fonction.

Que signifie au juste ce calcul intégral ?

La représentation d'une fonction, consiste à relier les coordonnées de deux variables qui dépendent l'une de l'autre, au sein d'une courbe de points M(x,y) le plus généralement continue.

- *Remarquons au passage que dans l'espace à 3 dimensions, on pourrait tout aussi bien tracer des courbes ou des surfaces plus ou moins complexes en reliant des points (x,y,z) cette fois-ci*

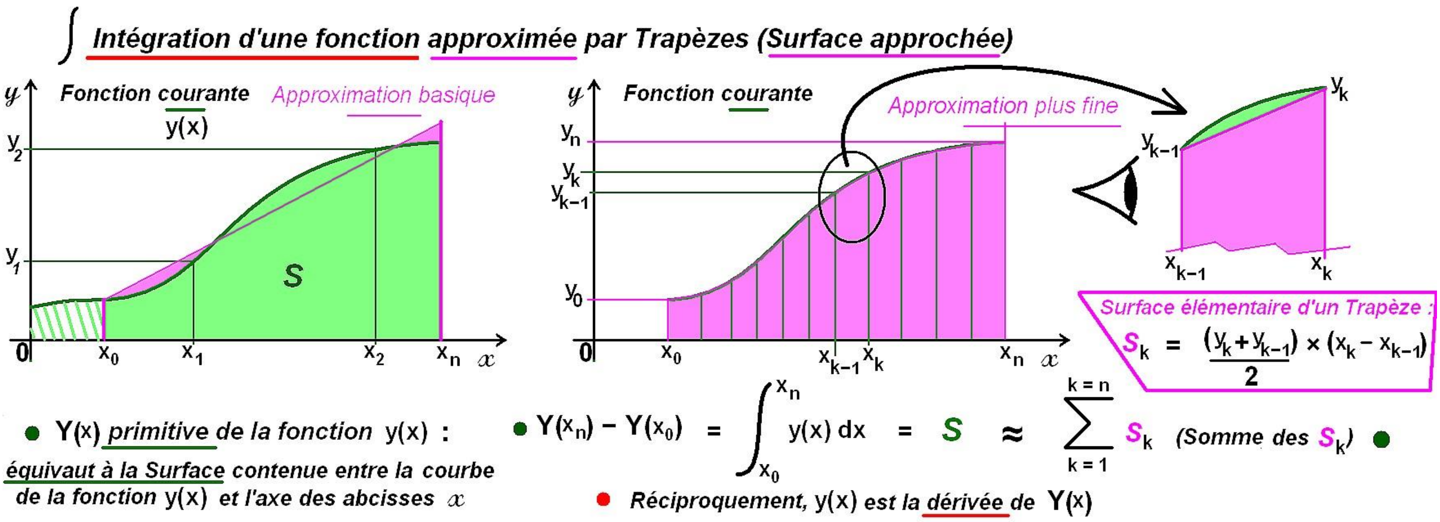
En projetant cette courbe sur l'axe des abscisses, nous pouvons nous apercevoir qu'une certaine surface est balayée (ici, dans la représentation la plus classique, le balayage a lieu de haut en bas).

- Nous pouvons également circonscrire cette surface par des bornes gauche et droite situées sur l'axe des abscisses, dans ce cas-là, la fonction est dite bornée

En conclusion, *la Courbe a « généré » sa surface* selon une direction axiale (l'axe des ordonnées y) : en correspondance, nous écrivons simultanément que la fonction a « généré » son intégrale

Et puisqu'on sait depuis le deuxième épisode, comment se simplifier la tâche pour calculer des surfaces, c'est à dire en la découpant en tranches additionnées ensuite, ne nous gênons pas !

D'ailleurs c'est ainsi que Bernhard Riemann (1826-1866) a procédé – et il a été capable de le faire sur une infinité de supports spatiaux et de surfaces comme nous le verrons à la fin de cet épisode



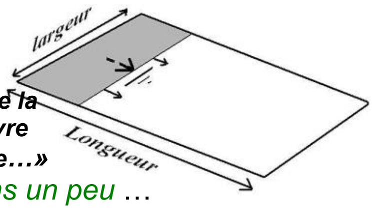
Inversement, nous voyons, « intégré » dans notre dessin explicatif, que les mathématiciens se sont intéressés, pour un ensemble d'exemples dits … « canoniques » de fonctions, à retrouver algébriquement l'écriture analytique des surfaces, afin de se passer de toute représentation graphique : c'est ainsi qu'ils ont désigné comme Primitives les expressions qui s'avèrent donner l'intégrale d'une fonction (canonique)

Par convention, on choisit x0 de façon à ce que Y(x0) s'annule pour écrire finalement Y(x) =

Exemples : $Y(x) = ½ x^2$ est la primitive de la fonction $y(x) = x$ ou bien $Y(x) = x^3$ est la primitive de $y(x) = 3 x^2$,…

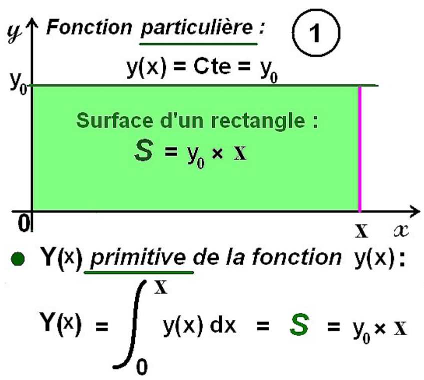
Ah oui ? Mais Oui ! Apprenez-moi tout le « Canon » par cœur,…

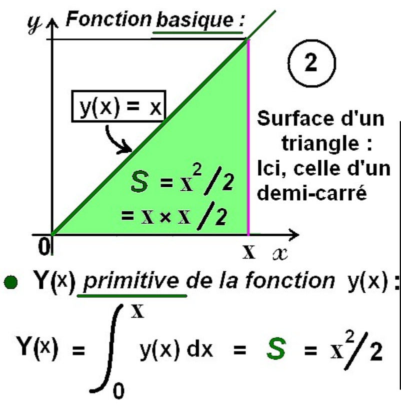
Bien, mais néanmoins, laissons un petit dessin nous faire mieux comprendre de quoi il en retourne… *Nous avons vu « ça » au 2ème épisode >*



« Le balayage de la Longueur couvre la Surface…»

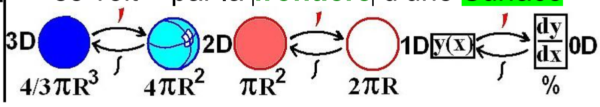
< Progressons un peu …





Nous comprenons peut-être mieux comment une droite a pu générer une surface qui renvoie à l'expression de la primitive **Y**

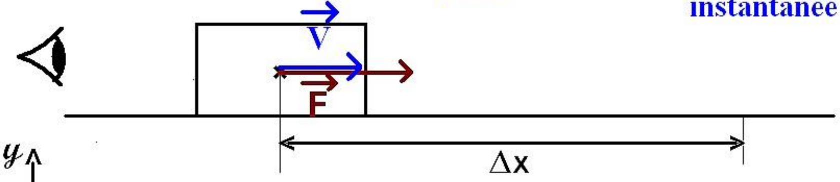
Inversement : **y**(x) est la « dérivée » de **Y**(x) « se voit » par la frontière d'une Surface

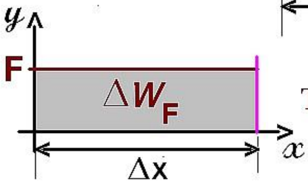


Les Mathématiques pour unifier la Physique

A la suite de Newton et Leibniz, les Mathématiques vont continuer d'appuyer la formalisation de la Physique pour expliciter par exemple les notions de Travail d'une force ou d'Energie…avant de déboucher à la notion de Puissance qui est à l'Energie ou Travail ce que la vitesse instantanée est au déplacement :

Puissance instantanée $\mathcal{P}_F = \dfrac{dW_F}{dt} = F \times \boxed{\dfrac{dx}{dt}} = F \times V = \vec{F} \cdot \vec{V}$ **Vitesse instantanée**





Travail $\Delta W_F = \int \vec{F} \cdot \vec{dx} = F \times \Delta x$
dt

Le point " · " désigne le « produit scalaire » de deux vecteurs, ici ceux qui représentent la Force (motrice) et la vitesse instantanée en chaque point du parcours.

Le travail, quant à lui, est celui de cette même force le long du même parcours

Le signe « *integrale* » $\int$ montre que l'on procède avec le travail à l'intégration de la Force <u>sur le parcours</u>, et logiquement, nous pouvons représenter cette variation produite du travail par une Surface à nouveau…

Dans la foulée, seront introduites les notions d'Energie cinétique – dont la variation au cours du temps correspond naturellement aux Puissances en jeu – ainsi que l'Energie potentielle.

- Ces deux énergies vont se compléter l'une l'autre – un peu à la façon des vases communiquants – pour constituer par sommation l'Energie (mécanique) totale dont on vérifiera constamment la ***conservation*** *(de même qu'on sera attaché à la conservation de la masse lorsqu'on abordera la* ***Mécanique des Fluides***

Ces outils mathématiques et ces nouvelles notions physiques seront aussi bien reprises et exploitées <u>par analogie</u> pour passer à l'étude d'autres disciplines…

- des échanges de chaleur et travaux produits avec James Joule (1818-1899) qui détermine l'équivalent mécanique de la Chaleur, c'est en fait Sadi Carnot (1796-1832) – *mort si jeune* – qui avec son ouvrage « *Réflexions sur la Puissance motrice du Feu* …» de 1824 invente la ***Thermodynamique*** qui, après l'étude des cycles d'échanges travail-chaleur, contient déjà le ***second principe*** formulé mathématiquement en 1850 par Rudolph Clausius(1822-1888)

- La formulation probabiliste de ce second principe par Ludwig Boltzmann (1844-1906) va jeter le pont vers la ***Mécanique statistique*** qui induira d'importants débouchés – jusqu'aux travaux de Planck et Einstein –

Sur la tombe de Boltzmann *(mort incompris)* figure la formule mathématique qui résume sa vision : $S = k \, Log \, (W)$

Elle relie l'évolution (l'entropie S) d'état <u>macroscopique</u> d'un gaz à sa distribution <u>microscopique</u>, formulée avec une constante énergétique (**k**) , une fonction de probabilité (**W**) et son logarithme

(Le logarithme dont on reparlera avec la règle à Calcul)

- *Progressivement se développent et sont utilisés les différents opérateurs mathématique de calcul différentiel qui vont investir toutes les <u>équations</u> mathématiques qui vont <u>modéliser</u> les phénomènes physiques :*

Les équations d'***Ondes***, de la ***Chaleur*** (par Joseph Fourier (1768-1830) *qui par ailleurs mit au point un intéressant procédé mathématique dit de « transformées de Fourier » très usité pour décomposer tous types de signaux vibratoires comme le Son ou autres*) et surtout la ***Mécanique des fluides*** vont recourir à toute une famille de ces opérateurs qui consistent à dériver de façon multiple ou répétée toute fonction, par rapport aux différentes coordonnées d'Espace et du temps (*La notion d'Espace-temps sera abordée au 20ème siècle*) …

Pour la beauté de l'écriture mathématique, son formalisme et tous ses opérateurs différentiels, voici la « célèbre » équation de « Navier – Stokes » qui décrit au mieux les mouvement des fluides

(avec l'explicitation des phénomènes et grandeurs physiques concernés)

$$\underbrace{\rho}_{\text{masse volumique}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}\right)}_{\text{Accélération}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{pression}} + \underbrace{\rho \vec{f}}_{\text{volumiques (ex : poids)}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{v}}_{\text{viscosité}}$$

Somme des efforts :

Et la Lumière fut…

C'est au XIXe siècle que l'on comprend mieux les phénomènes électriques et magnétiques , à la suite des travaux d'Ampère (1775-1836) et de Faraday (1791-1867) qui fut, par ailleurs, un inlassable vulgarisateur. Ainsi sont révélés les charges électriques **+** et **–** , distribuées un peu partout, et soumises aux deux types de forces, électriques et magnétiques, décrits par des champs vectoriels liés l'un à l'autre.

Les lois reliant ces deux champs sont synthétisées par James-Clerk Maxwell (1831-1879) en ~1860 en un ensemble d'équations qui, en ***Electromagnétisme***, sont aussi fondamentales que celle de la ***Mécanique*** par Newton.

- La conséquence de ces équations est de prédire l'existence d'oscillations des champs électrique et magnétique qui se propagent sous forme d'ondes qui seront observées expérimentalement par Heinrich Hertz (1857-1894 !) et dont on finit par découvrir plus tard que la vitesse est celle de la lumière visible, solution prédite par la résolution des équations

Là aussi, il s'agit d'apprécier à leur juste valeur le formalisme de ces équations :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{(Maxwell-Faraday)}$$

Nous retrouvons les différents opérateurs différentiels qui montrent les variations conjointes des champs électriques et **E** et magnétiques **B**

$$\nabla . \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{(Maxwell-Gauss)}$$

Nous avons une Loi qui renvoie à l'Electrostatique selon une distribution de charges électriques…

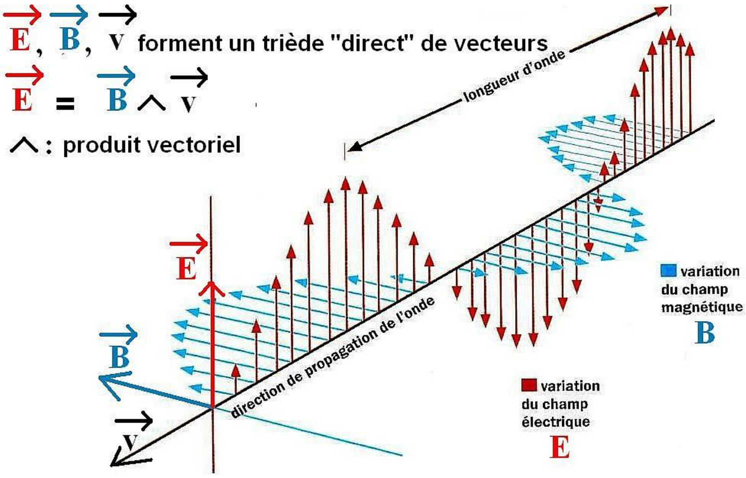
$$\nabla . \vec{B} = 0 \quad \text{(Maxwell-flux)}$$

Le flux du champ magnétique au travers d'une surface orientée est nul ou indépendant de celle-ci

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{(Maxwell-Ampère)}$$

Les champs électriques et **E** et magnétiques **B** sont liés à un courant de déplacement **j ~** à une vitesse

μ_0 et ε_0 sont respectivement la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du **Vide**.



- Il s'avère que leur produit $\mu_0 \times \varepsilon$ est l'inverse du « carré d'une vitesse » $1 / c^2$ et cette vitesse **c** n'est autre que celle de la Lumière !

*On explique ainsi que l'**Optique** est un cas particulier des phénomènes et grandeurs électromagnétiques.*

Ainsi apparaît pour la première fois l'idée d'une Unité sous-jacente de phénomènes physiques aux manifestations apparemment très différentes…

Einstein fait la boucle avec Galilée et Newton…

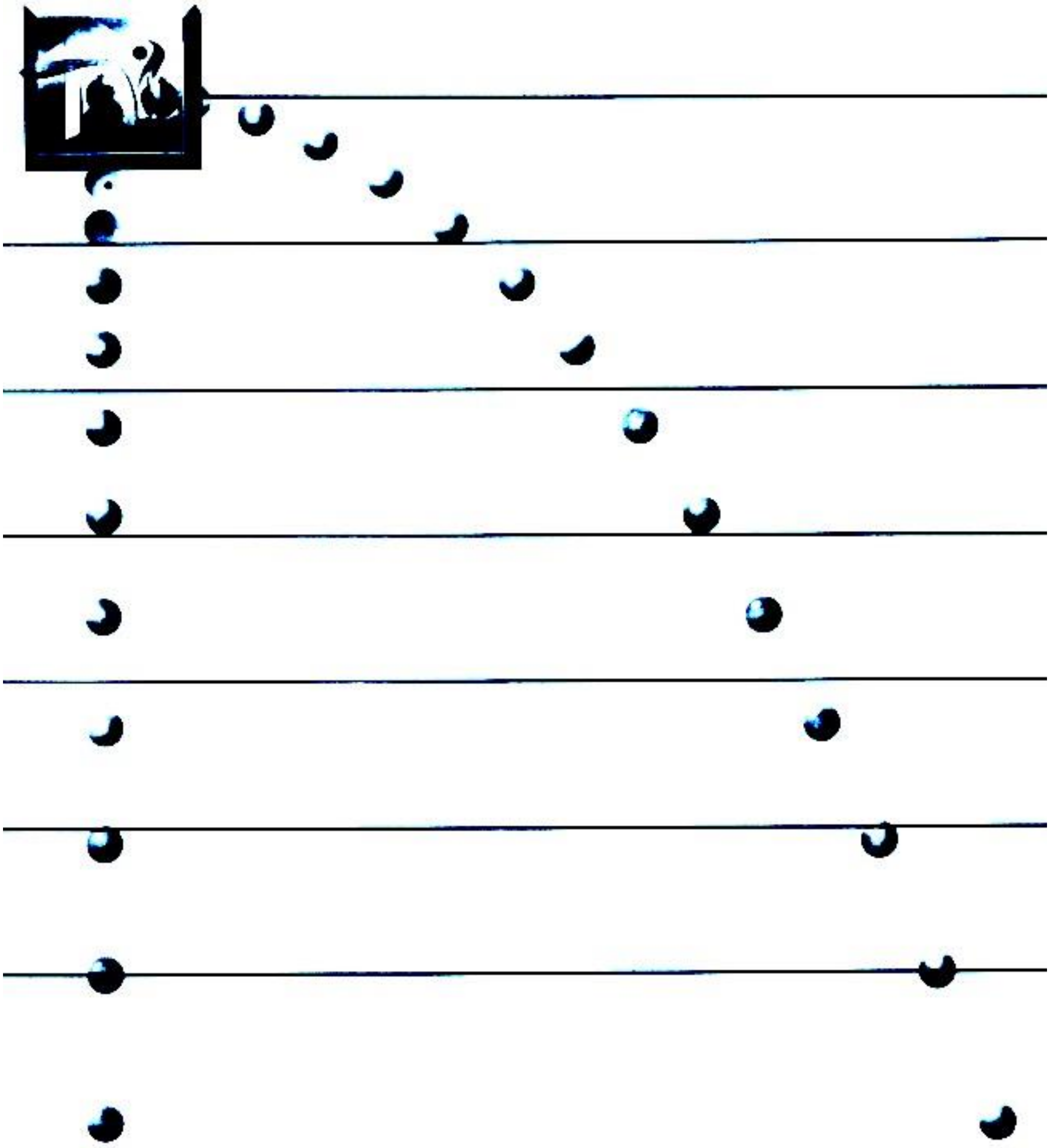
Selon Galilée, la « relativité » est que les forces s'exercent de la même façon quelque soit le repère « galiléen » dans lequel on expérimente et mesure, mais Newton va jusqu'à imaginer un repère absolu, auquel peuvent se référer tous les repères. Le principe de Relativité est remis à l'honneur au début du siècle dernier, peu avant Einstein (1879-1955), par Henri Poincaré (1854-1912) brillant mathématicien qui en étend l'application à tous les domaines de la physique, en s'appuyant sur les transformation de Lorentz (1853-1928) des coordonnées de l'Espace et temps basées sur le rapport de la vitesse concernée sur celle de la lumière

Einstein propose d'abord sa thèse sur la « ***relativité restreinte*** » dans laquelle, il stipule que seule vitesse de la Lumière est invariante, au contraire de la masse, des longueurs et temps….En fait, la théorie classique de Newton ne repose que sur une approximation, mais elle est largement suffisante, étant donné qu'il nous est impossible de voyager à la vitesse de la Lumière… *pour l'instant (!)*

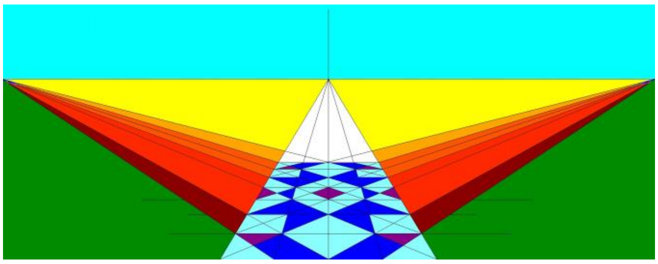
Ensuite c'est la « ***relativité générale*** » qui fait se *déformer* l'espace-temps autour de la masse-énergie. Pour cela, il fait appel aux espaces courbes de Riemann, car les plus courts chemins sont des «géodésiques» (et non des lignes droites) et au calcul « tensoriel » multidimensionnel qui « généralise » le calcul vectoriel.

Et… « $\mathbf{E = Mc^2}$ » ? … *Fallait bien impressionner le commun des mortels…* ☺

Et si nous retournions à nos billes ?



La photographie montre nettement que les deux billes – ***l'une initialement au repos et la deuxième lancée horizontalement*** – **parviennent rigoureusement en même temps au sol !**



Les Mathématiques au service de l'Art

Quand elles se font médiatrices de l'émotion des sens

L'homme forge ses premiers outils il y a plus d'un million d'années, pour des raisons pratiques…

Il faut attendre bien longtemps pour qu'apparaissent les premières traces d'un certain « art pictural », comme aussi bien le témoignage d'ébauches d'instruments de musique : cela date de « seulement » 30 à 40 000 ans.

Or, à la même époque, se manifestent les premiers signes d'énumération marqués sur les mêmes supports (pierre, os, ou bois) ; ce qui semble attester que le cerveau s'est suffisamment développé pour maîtriser la complexité et recourir à la symbolique pour des considérations pratiques ou … métaphysiques !

La Préhistoire de l'Art impose néanmoins certaines règles

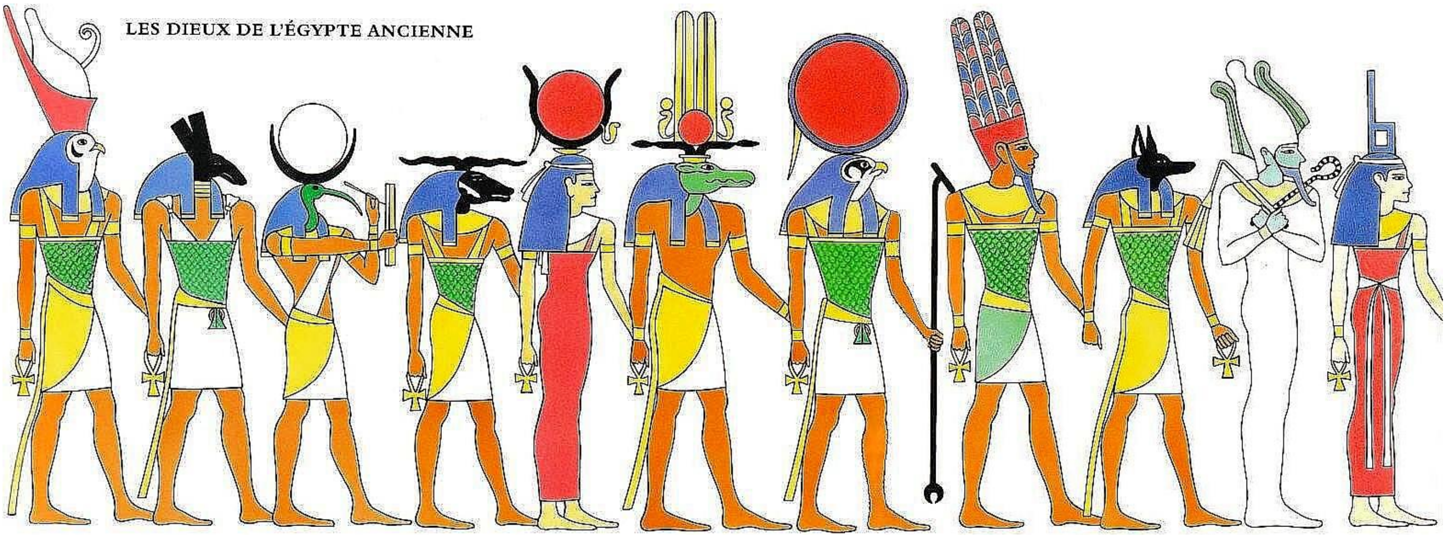
Les peintures et motifs de la grotte de Lascaux (comme celles plus anciennes de la grotte Chauvet), qui datent du magdalénien (sinon du paléolithique supérieur), traduisent avant tout la charge symbolique qui est recherchée par les premiers « artistes » afin de servir en quelque sorte de « *talismans* » bénéfiques à leurs congénères chasseurs et membres du clan…

Le respect des proportions des différents sujets représentés a moins d'importance que leur pouvoir « chamanique ».

C'est lorsque les Civilisations se forment, que les représentations se doivent de « flatter » les sens… Ainsi, par exemple, les artistes *égyptiens*, tout comme leurs collègues scribes, se doivent d'être davantage respectueux et plus explicites quant aux impératifs liés au culte tout comme à la gestion administrative.

C'est alors que s'élabore progressivement au travers des royaumes un certain « canon » des représentations de la mythologie en parallèle avec les premières règles administratives…

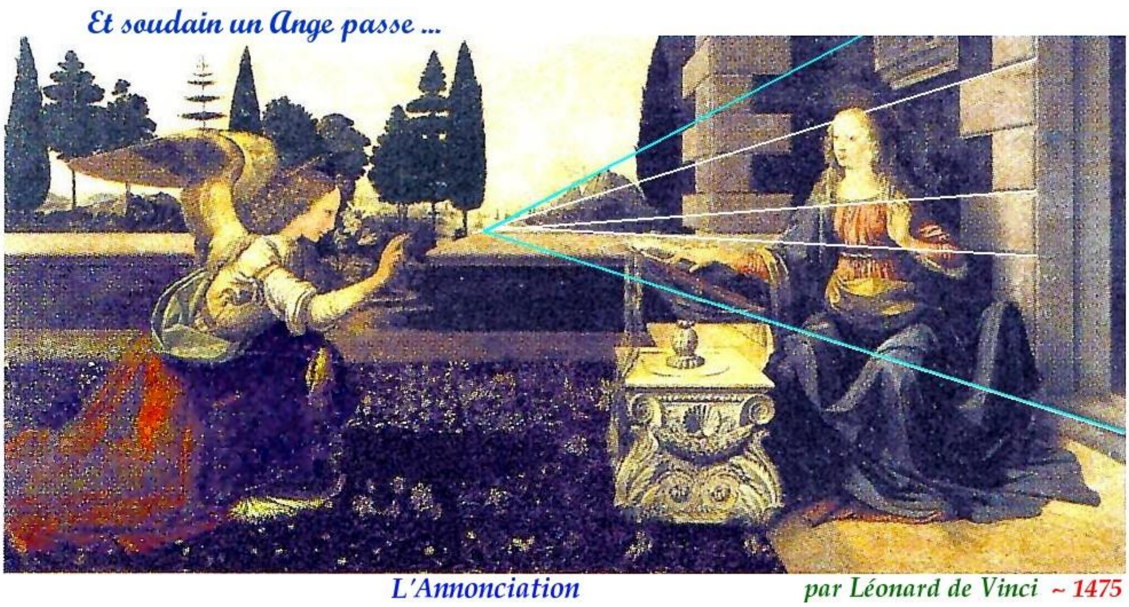
☞●□❒♓●➔♑♏ ***(euh ! pardon…)*** ***Florilège…***



***Mais où vont-ils, tous alignés à la queue leu leu ?… Chez le** « Chiropracteur » ! ☺ …*

Des siècles, voire des millénaires passent… Les représentations passent des stèles aux toiles des peintres ou aux tapisseries de ces dames… Nous sommes alors à l'époque du Moyen âge et les peintures suivent tout juste les modes vestimentaires… Quant aux proportions, c'est à se demander si certains peintres ne sont pas retournés en… « Préhistoire » !

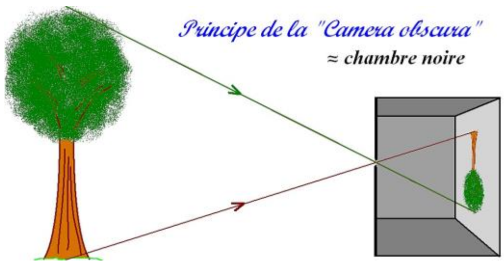
Mais soudain, à la Renaissance…



Quand discernement et réflexion transcendent la surface de représentation

Ce sont les grecs, inventeurs de la *Géométrie*, qui vont assimiler la Lumière à ses rayons visuels qui convergent vers l'œil, ou du moins émanent de l'œil – ils se sont mépris en effet sur le sens des rayons – et Euclide (vers l'an 300 av J.C.) formalise cela après l'idée originale de Pythagore (VI^{ème} siècle av J.C.). Quant à Héron d'Alexandrie (scientifique et inventeur prolixe du 1er siècle de notre ère), il s'interroge sur la nature des rayons, leur vitesse de propagation et même sur leur réflexion, 16 siècles avant Descartes.

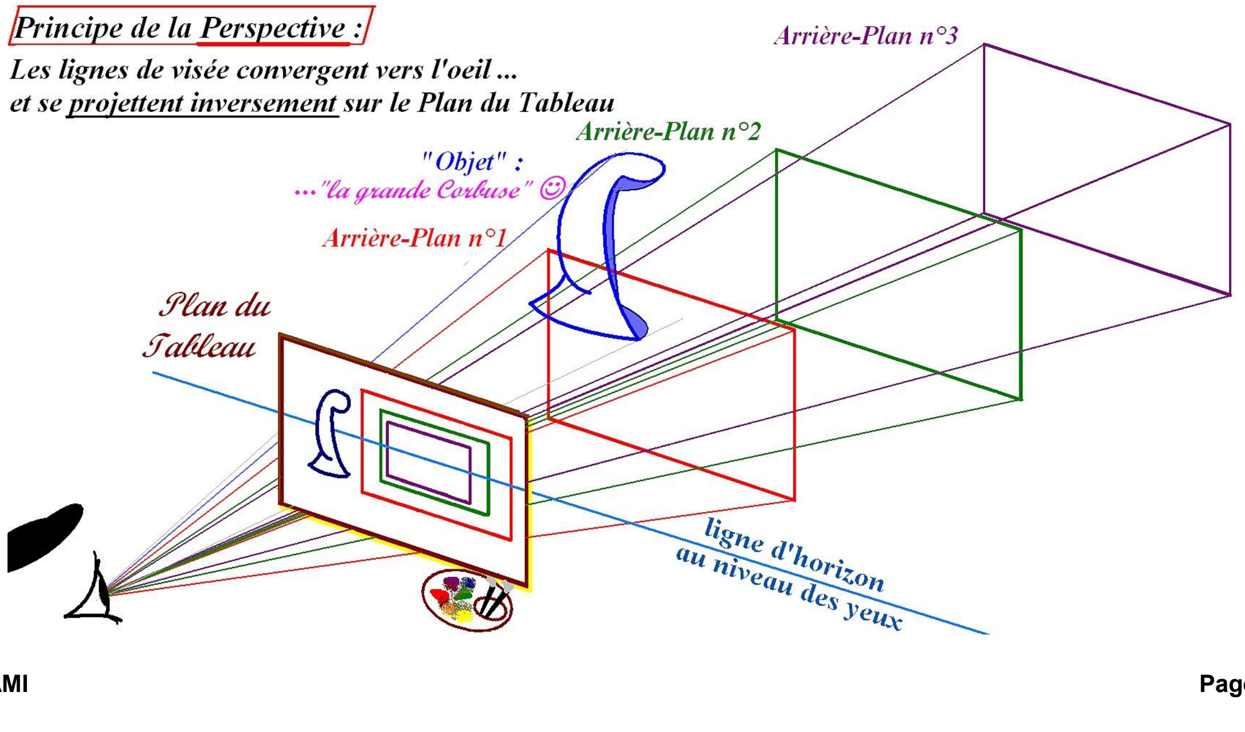
C'est le scientifique arabe Ibn El Haytham (965-1039) *(« Alhazen »pour les « gosiers » occidentaux)* qui rétablit le bon sens de propagation des objets vers l'œil et s'intéresse à la ***physiologie*** de ce dernier. Enfin Kepler (1571-1630) va déterminer que l'image se forme sur la rétine avec sa mise au point grâce au cristallin qui fait office de lentille adaptative, et Descartes complète le rôle du cerveau pour redresser et « traiter » l'image.



Entre-temps, c'est bien Léonard de Vinci (1452-1519), peintre et esprit curieux scientifique qui va imaginer le procédé semblable à celui de la chambre obscure, inventée peu de temps auparavant dans les ateliers des peintres et sculpteurs florentins.

Un des principaux inventeurs de la ***Perspective*** est l'architecte Brunelleschi (1377-1446) (qui réalisa la célèbre *coupole de la Cathédrale de Florence et inaugura la famille des « ingénieurs de la Renaissance »*), en formalisant que le cadre d'un tableau se trouve sur les rayons convergents vers l'œil, issus des objets

- Ceci explique donc pourquoi les objets – *de même taille pour simplifier le raisonnement* – nous paraissent plus petits au loin que de près… *Démonstration par la Géométrie…*



Léonard de Vinci décrit la ***Perspective***, dans son recueil de croquis rassemblés en un « Traité de peinture », comme la « vision d'un corps qui se trouve derrière un verre transparent sur lequel il se reflète ».

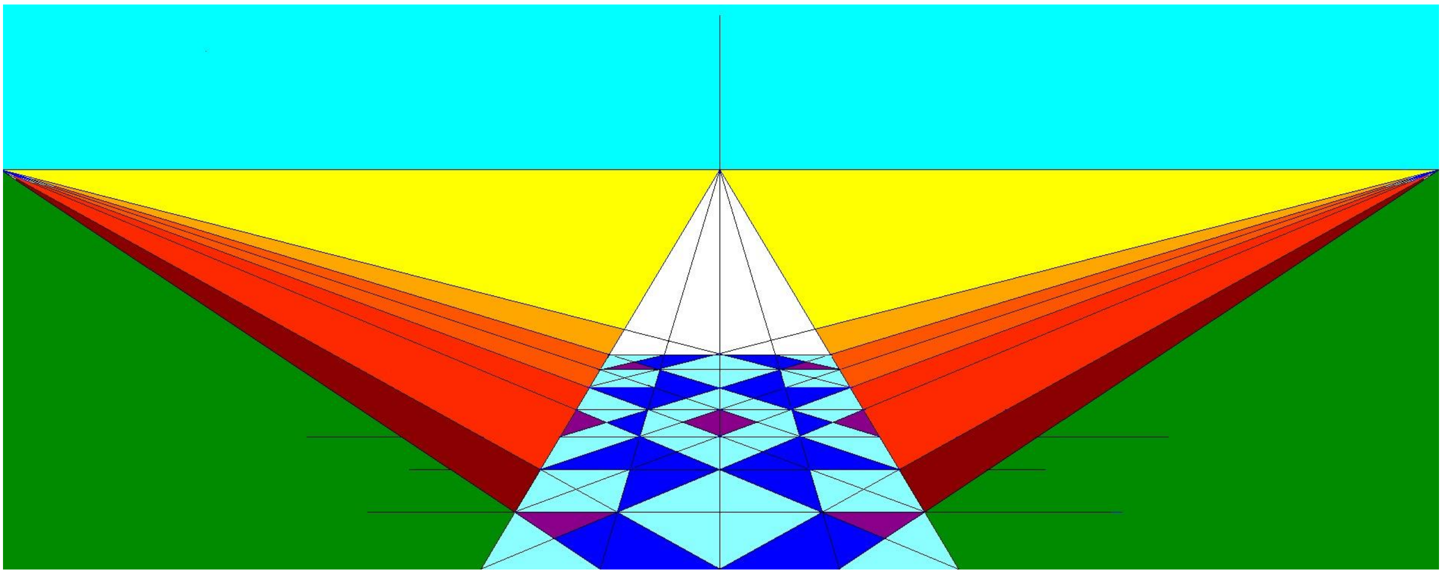
Il va étendre le rendu de cette Perspective par la technique du « ***Sfumato*** » qui, associé aux effets de l'atmosphère, rend compte de l'éloignement des plans et objets par des *couleurs progressivement estompées et décalées vers les bleus…*

Quand la justesse des figures passent par le bon alignement des diagonales…

Les principes géométriques de la Perspective formalisés au début par par Alberti (1404-1472*) élève de Brunelleschi*, permettent d'ores et déjà de restituer une bonne disposition et proportion aux objets représentés en perspective.

- Cette méthode fait en effet appel aux propriétés des diagonales qui relient les sommets de figures géométriques simples comme les carrés ou rectangles…

Application pour un pavage régulier…



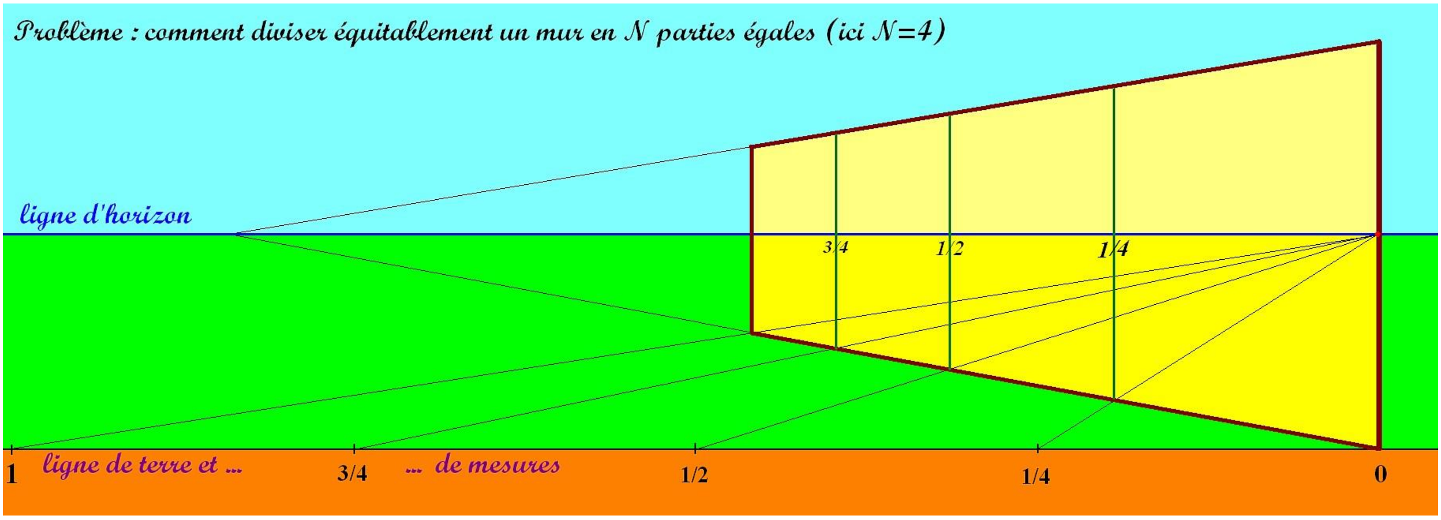
Bon, je me suis un peu lâché ! Mais voyez-vous, tous ces motifs et couleurs me viennent… naturellement ! ☺

Ces principes seront repris puis complétés au XVIème siècle, notamment par le chanoine Jean Pèlerin dit « Viator » (« voyageur ») qui qualifie « ligne d'horizon » la ligne qui se déplace avec le niveau des yeux de l'observateur et, étend la technique du « point de fuite » central vers la celle des *deux points de fuite latéraux* (ou convergent donc les familles de droites – parallèles dans l'espace à 3 dimensions).

Extension vers la bonne proportion des parties de plans verticaux

*Partager correctement des ensembles de murs, façades – donc plans verticaux – consistent à se rappeler que ces plans peuvent être partagés par des rectangles qui vont toujours générer des diagonales (ici, elles serviront uniquement de lignes de construction) qui convergeront vers une ligne fictive de « terre » qui sert à la mesure équitable de la partition de l'objet en **perspective**…* En fait, faire un quadrillage aide toujours… ☺

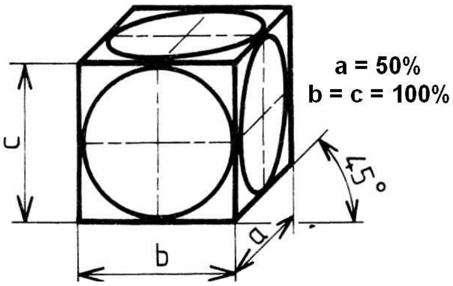
Application …



Bon ça va ? Ai-je été plus sobre ? ☺

Normalisation de la perspective en dessin industriel

Dans le seul but de « rationaliser » les types de représentations de pièces en Industrie – *puis progressivement dans le secteur des Services* – il fut décidé tout bonnement d'abandonner la notion de point de fuite ou convergence des droites parallèles… qui du coup restent parallèles.

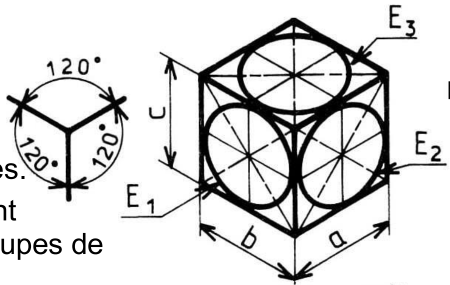


Cela ne se remarque pas trop pour les pièces de faible profondeur…

Ainsi, on parle de « ***perspective cavalière*** » pour une projection oblique Selon une direction donnée (généralement de 45°) sur un plan contenant l'une des faces de l'objet…

Ou bien alors, on recourt à :

la « ***perspective axonométrique*** »
qui va adopter une projection orthogonale
sur un plan désormais oblique :
les parallèles vont alors s'aligner selon
la verticale et selon deux directions obliques.

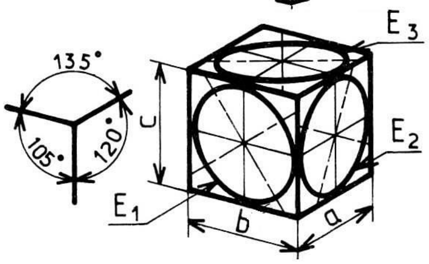


Projection isométrique (120° = 360°/3)
a = b = c = 82% des valeurs d'origine
petits axes d'ellipses (cercles en réalité) valant 58% du diamètre d'origine

- Les deux sous-familles essentielles sont

la « ***perspective isométrique*** » où les groupes de parallèles font le même angle entre elles (formule assez simpliste)

ou bien « ***perspective trimétrique*** » qui retrouve un peu plus de naturel…

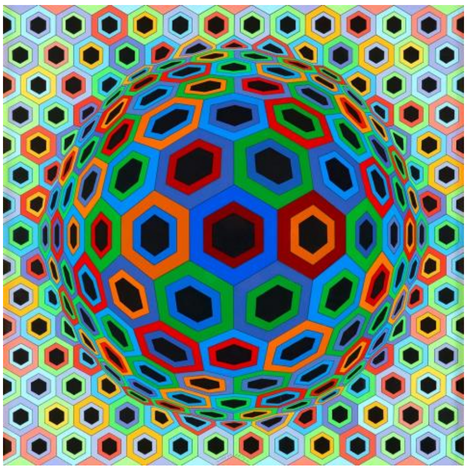


Projection trimétrique à 105° et 120°
a = 65% b = 86% c = 92%
petits axes d'ellipses (cercles en réalité) valant respectivement 76% 52% 40% du diamètre d'origine

Cela manque de charme me direz-vous !

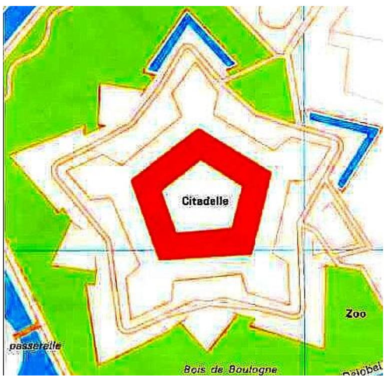
Rassurez-vous ! La perspective axonométrique a été habilement « détournée » par des artistes…

… pour en faire un art « **Cinétique** » !



Tel le français d'origine hongroise Victor Vasarely (1908-1997) qui va user de motifs purement géométriques mais aussi d'un jeu approprié de couleurs pour donner du « volume » à ses … toiles !…

… Au point de nous faire perdre en quelque sorte nos repères…



Enfin rendons un hommage à un grand ingénieur militaire français qui sut, à son époque, exploiter toutes les propriétés géométriques des polygones [*voire des « fractales »* avant l'heure, et dont nous parlerons prochainement] pour rendre ses places fortes « imprenables » :

Sébastien Vauban (1633 – 1707)

Avec ici le plan de la citadelle de Lille *(une de ses préférées)*

Des oreilles et… un cerveau pour apprécier la musique

Définitions

- *Qu'est-ce la musique ?* Une succession de sons pourrait-on répondre…
- *Alors qu'est-ce le son ?* Une vibration…
- *Une vibration de quoi ?* l'air ! (l'air de quoi ? Chut !) (accessoirement un support liquide ou solide…)
- *Qu'est ce qui fait vibrer l'air ?* l'émetteur (le corps ou l'objet…)
- *Qui émet vers qui ou quoi ? le récepteur, pardi ! (idem un corps ou un objet…)*
- *Et ils se trouvent toujours ? Ça dépeeend… s'il y a du veeent…*Non mais c'est fini oui !

Donc si le son peut se transmettre de l'émetteur au récepteur, c'est qu'il s'est propagé, avec une certaine vitesse de propagation – qui dépend du milieu dans lequel il se propage –
Dans l'air où elle dépend de sa température, elle vaut : $V = 330{,}75\ (m/s) \times \sqrt{\dfrac{273{,}15 + T(°C)}{273{,}15}}$

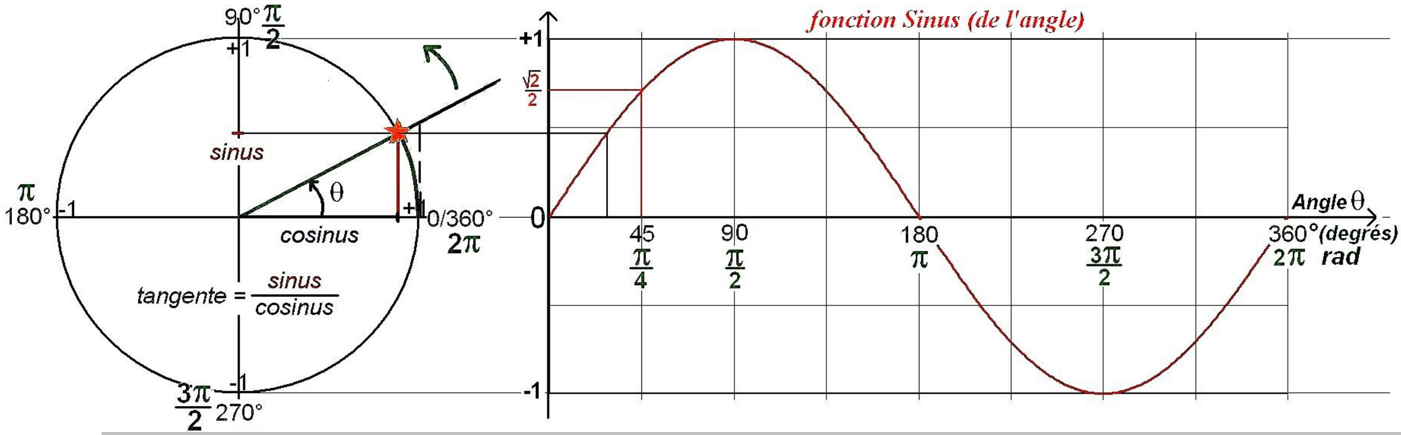
(Le son va beaucoup plus vite dans l'eau : plus de 1400 m/s – et les métaux et les bois : 3500 à 4500 m/s)

Cela va donc assez vite, mais beaucoup moins vite que la lumière (un million de fois moins vite), ce qui permet par exemple de situer un orage (qui « tonne ») par rapport à l'éclair perçu…

(**3 secondes par km** puisque 3 ~~s~~ × 333,33.. m/~~s~~ = 1000 m soit 1 km ; *facile quand on n'oublie pas les unités* !)

- Le son est une vibration, et une vibration « ça ondule » , à la façon d'une onde que l'on voit progresser à la surface d'un étang dans lequel on vient de jeter un caillou…

Voici pourquoi on eut vite l'idée de représenter cette onde par cet objet mathématique qu'est la Sinusoïde



Rappel depuis l'épisode 2 sur son origine en Astronomie puis le 4 sur la représentation d'une fonction

- (conversion : 2π × radians = 360 ° donc la mesure angulaire d'un radian vaut 360/(2×π) ° soit ~57,3 °)

La longueur d'onde « ondule » de 0 à 2 π sur un intervalle de temps appelé « Période » (*puisque cette vibration est un mouvement périodique*) et elle est d'autant plus courte que cette période est courte

- Une Période courte de reproduction de cette sinusoïde signifie inversement une fréquence élevée

Si la période s'exprime en fraction de seconde, la fréquence s'exprime en son inverse qui peut s'écrire s^{-1}

Rappel que les unités se multiplient aux valeurs… pour former les grandeurs… $f = \dfrac{1}{T(\times s)} = \dfrac{1}{T}\left(\times \dfrac{1}{s}\right) = \dfrac{1}{T}\left(\times s^{-1}\right) = \dfrac{1}{T}\left(\times Hz\right)$

Nous voyons le Hz (« Hertz »en hommage au physicien du même nom) désigner l'unité de la fréquence en remplacement équivalent de l'inverse de la seconde.

- Pour un son – en ***Musique*** – nous allons parler de « hauteur » plutôt que de fréquence.
- Ce son nous parviendra d'autant plus « fort » qu'il aura été émis « puissamment » depuis son émetteur – et réceptionné plus ou moins puissamment par notre récepteur (ex : notre oreille) après qu'il soit en partie *amorti* par son milieu de propagation (dans l'air, les « aigus » sont davantage amortis que les « graves »)

En résumé : un son basique émis à une certaine fréquence peut s'écrire (à la façon d'un signal périodique qui dépend du temps t qui s'écoule) en faisant appel à la fonction sinusoïde : $\boxed{a(t) = a^0 \sin(2\pi f \times t)}$

Le terme a^0 désigne la puissance dont l'unité d'expression est le « décibel » qui vaut un 1/10e de bel , noté dB

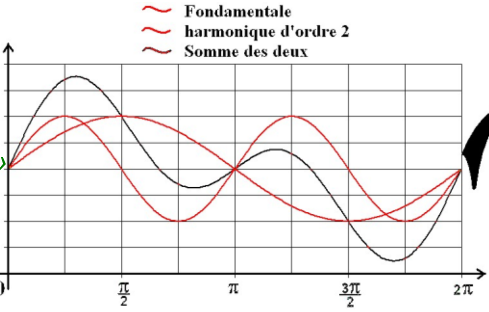
- Cette unité est issue de considérations physiques (une puissance P) et physiologiques (la façon dont nos oreilles et cerveau perçoivent les sons) et se réfère à la Puissance minimale qu'il est possible de percevoir en exprimant un rapport : $\log(P / P_{min})$ [Promis, on étudiera la fonction *logarithme* au prochain épisode]

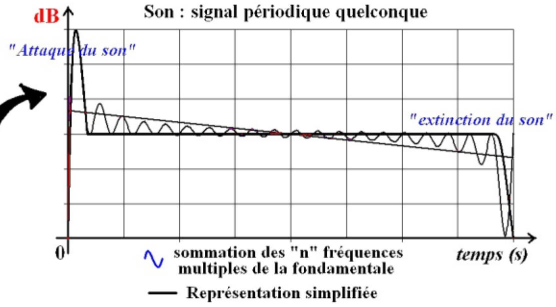
On « perçoit » 10 violons ensemble seulement « 10 décibels au dessus » sur une échelle « linéaire »

Comment y retrouve t-on ses petits…

Passer du bruit à de la musique et du cri à un chant, tout un art !… d'autant plus que les sons émis sont plus ou moins « riches » à émettre (et à percevoir tant qu'à faire).

Ils sont riches en fait d'une succession d' « harmoniques » – pour chaque son émis – dont on sait désormais, grâce aux travaux du mathématicien et physicien français *Fourier (1768-1830) qu'ils peuvent être décomposés en une série de fonctions sinusoïdes additionnées, aux fréquences multiples de la première , appelée « fondamentale ».*





En fonction du temps, on peut *représenter par exemple :*

- *la puissance : «dynamique»*
- *la fréquence : «mélodique»*

Une autre représentation sera celle du «spectre» qui, à chaque fréquence donne la puissance d'une partie du son…

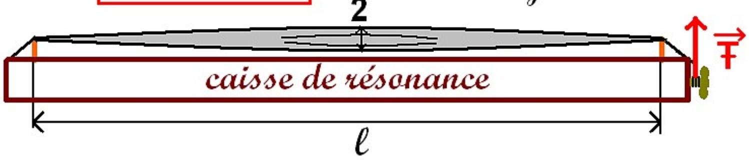
- On distingue aussi bien une voix d'une autre que le son d'un instrument de musique de celui d'un autre, même lorsqu'ils sont émis à la même fréquence fondamentale, par la caractérisation des harmoniques qui enrichissent le son selon le « timbre »…

Pour la même note donnée donc, un violon « sonnera » différemment d'un piano ou d'une clarinette car ils ne possèdent pas les mêmes harmoniques (elles sont d'ordre pair, ou impair, ou il en manque sur le spectre…)

A la base de tous les instruments de musique à corde, le monocorde, successeur de l'arc « musical », mais ancêtre des quadricordes et parmi eux : la *Lyre*. qui va nous servir ici d'instrument « pédagogique »…

Le schéma ci-dessous est associé aux formules qui caractérisent la Physique des sons émis

$\boxed{\text{corde vibrante}}$: $\frac{\lambda}{2}$ *sur la longueur* ℓ (*)



(car l'onde est stationnaire)*

$$V = \lambda \times f \iff f = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{2\,\ell} \quad \text{soit}$$

Vitesse de propagation de l'onde :

$V = \sqrt{\dfrac{T}{dm/d\ell}}$ *: force de tension de la corde* ; *: masse linéaire de la corde*

$$\ell = \frac{\lambda}{2} \iff \lambda = 2\,\ell \;;\; \lambda \text{ longueur d'onde}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{2\,\ell} \times \sqrt{\frac{T}{dm/d\ell}}} \quad \text{fréquence de vibration}$$

la $\boxed{\text{caisse de résonance}}$ *peut, en plus de la fréquence fondamentale* f, *restituer les harmoniques* $2f, 3f, 4f$ …

Bon, on va désormais pouvoir jouer, oui ?…

Pour faire vos jeux, faites vos gammes !

Puisque les harmoniques ont été introduites, il est temps d'évoquer enfin le Maître Pythagore…

Nous avons vu, épisode 2, que celui-ci, entouré de ses disciples, (au VIème siècle avant J.C.), résumait en quelque sorte le Monde à la symbolique des chiffres et nombres et à leurs rapports « harmonieux », ce qui allait donc s'appliquer à la « Musique » terrestre comme céleste…

La gamme de Pythagore

Ainsi s'est posée l'étude de la meilleure répartition des fréquences pour composer la « bonne » musique et d'adopter une gamme de « notes » (appelés également « tons ») établie sur les rapports faisant intervenir à la base les seuls chiffres **2 et 3.**

- **Ainsi** lorsque la corde est pincée en son milieu, donc partagée temporairement en deux , les ½ cordes émettent le même son mais à l'harmonique supérieure d'ordre 2, qui sera appelée par la suite « **Octave** »
- Lorsque la corde est pincée à ses **2/3**, les deux « sous-cordes »vont émettre deux sons parents d'une octave l'une de l'autre, et la fréquence fondamentale est située à la « **Quinte** » dans un rapport 3/2

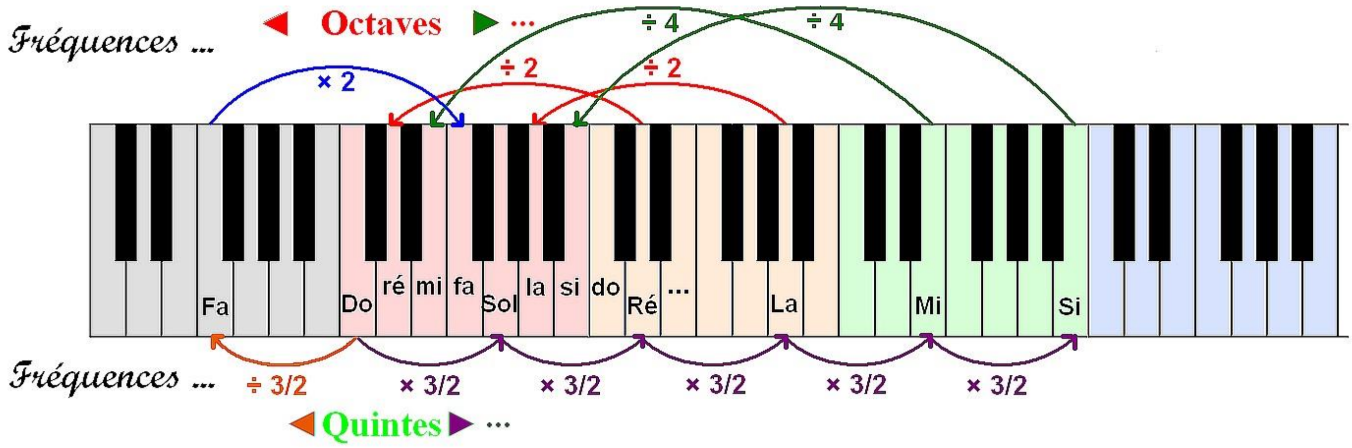
Il s'avéra que l'**accord** associant la fondamentale (également appelée « tonique ») à la note située à la **Quinte** au dessus (qui fut ensuite appelée « dominante ») « sonnait » harmonieusement.

Allons voir sur le schéma en page suivante comment cela sonnait si bien « harmounieusement »… ☺

Bon, il me semble que l'on a compris que le « Sol » est à la Quinte du « Do », Non ?

Aussi, fut construite la Gamme de Pythagore en progressant par Quintes et Octaves réciproques…

Nous allons anticiper de quelques… deux millénaires pour recourir au clavier du Piano afin de mieux illustrer le principe de fixation de la Gamme des différents tons en procédant par bonds successifs…



Plaçons-nous donc dans une octave de <u>référence</u> dont nous allons noter les notes avec un <u>indice 1</u> :

- Nous progressons du Do$_1$ (Ut) à Sol$_1$ en multipliant la fréquence par **3/2**
- Puis de **Sol$_1$** à **Ré$_2$** en multipliant la fréquence de **Sol$_1$** par **3/2** ce qui fait par rapport au 1er Do, le **Do$_1$**, une fréquence multipliée par $(3/2)^2$ soit $3/2 \times 3/2 = 3^2 / 2^2 = 9/4$ qui place donc le **Ré$_2$** dans l'octave suivante…
- **<u>Si on veut ramener ce *Ré$_2$* à *Ré$_1$* dans la même octave, il faut alors diviser cette fréquence par 2, ce qui nous permet d'obtenir un *Ré$_1$* qui vaut désormais 9/8 en fréquence de celle de *Do$_1$*</u>**
- Puis de **Ré$_2$** à **La$_2$** par multiplication par **3/2** ce qui fait par rapport au 1er Do, une fréquence multipliée par $(3/2)^3$ soit $(3/2) \times (3/2) \times (3/2) = 3^3 / 2^3 = 27/8$…
- **<u>On ramène de nouveau ce *La$_2$* à *La$_1$* dans la même octave, par division de la fréquence par 2, ce qui nous permet d'obtenir un *La$_1$* qui vaut désormais 27/16 en fréquence de celle de *Do$_1$*</u>**
- <u>Etc… Etc…</u>

Nous reconstruisons la gamme de Pythagore, dans la même Octave, avec les multiples de Do suivants :

Do : 1 > Ré : 9/8 > Mi : 81/64 > Fa : 4/3 > Sol : 3/2 > La : 27/16 > Si : 243/128 > Do *à l'octave* : 2

- *Nous pouvons ensuite calculer les rapports successifs entre les tons (Arrêtez, on veut plus ! ☹)*

Hé ! Ho ! Vous savez plus « fractionner » ? Révisez votre Cours n°3 !

Qu'observons nous dans cette <u>Gamme</u> issue <u>des</u> réflexions de <u>Pythagoriciens</u> ?

- Que nous passons d'une « touche blanche » à la « touche blanche suivante », <u>à condition qu'elles soient séparées par une « touche noire »</u> en multipliant la fréquence par 9/8

  Exemple : Do à Ré, Ré à Mi, Fa à Sol (Vérifions : f(Sol) = f(Fa)×9/8 = 4/3×9/8 = 36/24 qui vaut bien 3/2)

  Ainsi, en progressant par multiple de fréquence de 9/8, nous progressons … d' **« un ton »**

- Que nous passons d'une « touche blanche » à la « touche blanche suivante », <u>sans séparation par une « touche noire »</u> en multipliant la fréquence par … 256/243

Comment ? de Mi à Fa, soit de 81/64 à 4/3 nous avons multiplié par (4/3 / 81/64) soit 4/3 × 64/81 = 256/243

De même, de Si à Do supérieur, nous retrouvons f(Do+) = f(Si) × 256/243 = 243/128 × 256/243 = … **2**

Ainsi, en progressant par multiple de fréquence de 256/243, nous progressons … d' **« un demi-ton »**

L'étendue de l'Octave qui regroupe **7** « touches blanches » et «**5** « touches noires » inclut **12 demi-tons**…

… C'est notre **Gamme <u>chromatique</u>** bien connue à **12** demi-tons

Alors que la gamme aux **7** notes (touches blanches) est appelée **Gamme <u>diatonique</u>**

Elle couvre donc sur la même Octave six tons entiers.

Or, il s'est avéré au cours de l'Histoire avec le développement des instruments <u>à cordes</u> qu'on cherchait à <u>« accorder »</u> , qu'inexorablement on « dérivait » par rapport à l'Octave, en progressant ½ ton par ½ ton…

Ex : 12 ½ tons successifs donnent en effet d'après le rapport (256/243) : $(256/243)^{12}$ = 1,869 très éloigné de 2

Avec les tons entiers (6 tons = 12 demi-tons) aux rapports successifs de 9/8, c'est mieux : $(9/8)^6$ = 2.027 ~2 ?

Cet écart est pratiquement le « Comma » pythagoricien…

Nous entrâmes dans plusieurs siècles de controverse, depuis le Moyen-âge qui favorisait l'accord cette fois-ci des tierces dites « harmoniques » par augmentation de la fréquence d'un quart (Ex: f(Mi) = f(Do) × 5/4) mais en faisant « hurler » petit à petit les « Quintes » …

Aussi plusieurs théories se succédèrent jusqu'à aboutir à la gamme « tempérée » approchée puis « vraie » :

Récapitulatif (depuis le La$_3$ désormais fixé à 440 Hz)

Demi-tons	:	Gamme Tempérée_Mathématique			Gamme de Pythagore			Gamme des "physiciens"			Gamme tempérée bitonale		
		fréquence	rapport fréqu.	intervalles	fréquence	rapport fréqu.	intervalles	fréquence	rapport fréqu.	intervalles	fréquence	rapport fréqu.	intervalles
0	do	261,6	1,000	1,000	260,7	1,000	1,000	264	1,000	1	260,8	1	1,000
1	$^{\#}$do	277,2	1,059	1,059	274,7	1,053	1,053	279,5	1,059	1,059	278,4	1,068	1,068
2	re	293,7	1,122	1,059	293,3	1,125	1,068	297	1,125	1,063	293,3	1,125	1,054
3	^{b}mi	311,1	1,189	1,059	309,0	1,185	1,053	316,8	1,200	1,067	313,2	1,201	1,068
4	mi	329,6	1,260	1,059	330,0	1,266	1,068	330	1,250	1,042	330,0	1,265	1,054
5	fa	349,2	1,335	1,059	347,7	1,333	1,053	352	1,333	1,067	347,7	1,333	1,054
6	$^{\#}$fa	370,0	1,414	1,059	366,3	1,405	1,053	372,7	1,412	1,059	371,2	1,423	1,068
7	sol	392,0	1,498	1,059	391,1	1,500	1,068	396	1,500	1,063	391,1	1,500	1,054
8	^{b}la	415,3	1,587	1,059	412,0	1,580	1,053	416,8	1,579	1,053	417,6	1,601	1,068
9	la	440,0	1,682	1,059	440,0	1,688	1,068	440,0	1,667	1,056	440,0	1,687	1,054
10	^{b}si	466,2	1,782	1,059	463,5	1,778	1,053	465,8823529	1,765	1,059	463,6	1,778	1,054
11	si	493,9	1,888	1,059	495,0	1,898	1,068	495	1,875	1,063	495,0	1,898	1,068
12	do	523,3	2,000	1,059	521,5	2,000	1,053	528	2,000	1,067	521,5	2,000	1,054

➢ *Petit aparté mathématique : une moyenne harmonique entre deux fréquences f_1 et f_2 vaut $\boxed{2f_1 \times f_2 / (f_1+f_2)}$*

<u>Elle correspond</u> « naturellement » à la moyenne arithmétique des cordes vibrantes correspondantes ℓ_1 et ℓ_2

➢ *Certes, la gamme juste par définition est la « mathématique » qui fixe le ½ ton à $(2)^{1/12}$ ~ 1,059…*

➢ Or figurez-vous que la Gamme de Pythagore reste encore prisée, pour une raison « physiologique » : nous, « humains » percevons les sons trop bas dans les « suraigus »… Donc, en quelque sorte, la Gamme pythagoricienne *redresse « automatiquement » le défaut de l'oreille* en perception des hauteurs…

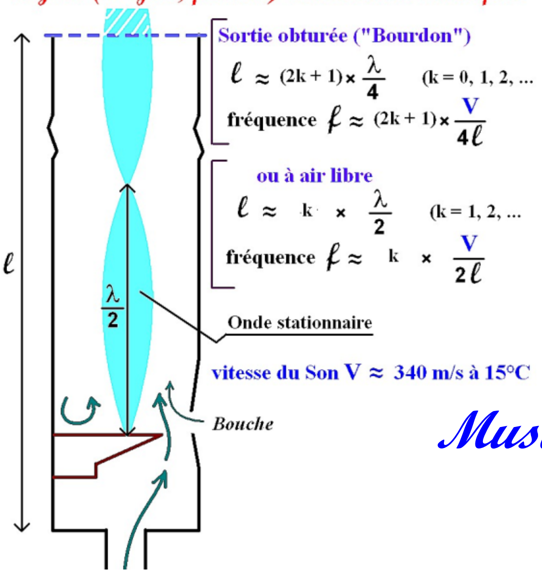
En pratique, les « accordeurs » de piano « à l'ancienne » travaillent en fait à dégager le meilleur compromis sur l'ensemble de la « tessiture » de l'instrument et selon les goûts même de l'artiste !

Jean-Sébastien BACH (1685-1750) d'ailleurs a composé ses suites pour Violoncelle avec la Gamme de Pythagore et le fameux « Clavier bien tempéré » (tempéré = «réparti») avec la Gamme « tempérée bitonale »

Comme quoi le « bon » musicien se débrouille avec n'importe quelle gamme « honnête »…

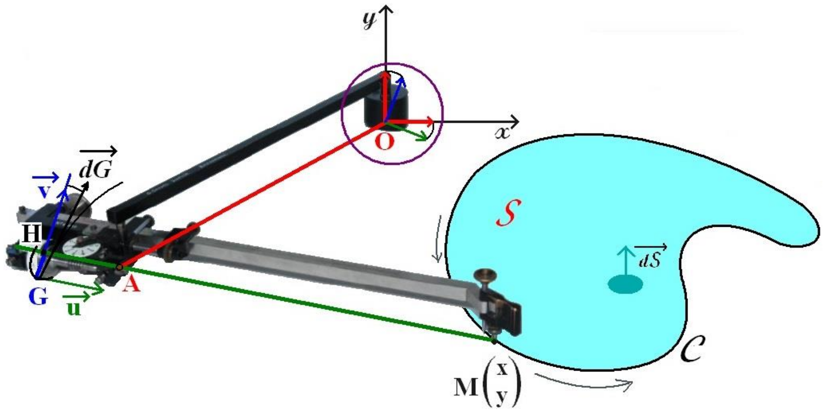
Puisqu'on parle de Bach, parlons de l'**Orgue** classique, le digne représentant des instruments… à Vent !

Tuyau (Orgue, flûte...) résonateur multiple



< L'onde stationnaire est désormais installée dans le tuyau qui fait, à la fois, office de support « vibratoire » et de « résonateur »…

Musique !



y
x
O
$\overrightarrow{dG}$
$\overrightarrow{v}$
H
G
$\overrightarrow{u}$
A
$\mathcal{S}$
$\overrightarrow{dS}$
$\mathcal{C}$
$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Mathématiques : des outils pour le progrès des idées

Quand la complexité simplifie…

Nous avons vu, au 1er épisode, et encore au dernier, que si les premières traces d'énumération apparaissent avec les premiers graphismes et peintures, c'est que le cerveau humain s'est complexifié…

Les chiffres sont le témoin de l'invention de l'écriture, puis les Mathématiques s'élaborent quelques millénaires plus tard, avec la maîtrise de cette écriture au service de la réflexion et de l'échange des idées.

Pourquoi les outils ?

L'homme est paraît-il paresseux… (*hum !…*) Alors il se forge des outils pour lui simplifier la Vie ! *Ainsi, il transforme des bouts de bois ou des fémurs en bâtons ou manches à tout faire, à commencer pour la chasse… Puis il taille des pierres de toutes tailles pour lui faciliter la découpe, (« il ou elle » bien entendu, puisque les peaux apprêtées plus facilement et judicieusement percées, deviendront vêtements…)*

Dénombrer ensuite des choses ou des êtres par des *entailles* faites sur des os ou bâtons est tout de même plus pratique que*… passer beaucoup de temps à l'expliquer avec force gestes tous les jours aux membres de sa tribu ☹ !* L'écriture vient ensuite au secours de la mémoire et favorise la réflexion, à tête reposée… Enfin les Mathématiques naissantes vont permettre de formaliser bon nombre d'idées qu'émettent les premiers philosophes et savants pour tenter de mieux appréhender le Monde dans lequel nous vivons…

En résumé :

Les Mathématiques sont un langage constitué d'outils pour cerner les grandeurs et pour explorer le réel…

(*« Tonique »… « Quinte »… « Octave »…Ainsi parlait Zarathoustra…☺*)

Puissance d'écriture… à commencer par le calcul de puissances

- *Pourquoi a t-on inventé la multiplication après l'addition qui permettait déjà de rassembler ses « billes »…?*

Car cela faisait déjà gagner du temps que poser par exemple :

3 + 3 + 3 + 3 = … 6 + 3 + 3 (*tant qu'à faire, faisons durer le plaisir ☺*) = 6 + 6 = 12 … Ouf !

Quand les nombres à additionner sont tant de fois le même, désormais nous passons directement à la… quantité de lots du même nombre. Exemple : 3 × 4 = 12 (4 « sacs » de 3 billes font 12 billes au total)

- Alors ensuite pourquoi a t-on inventé le calcul de puissances ?

Pour simplifier l'écriture des calculs… tout en montant d'un cran dans la complexité :

5 × 5 × 5 = 25 × 5 (c'est reparti pour un tour de manège ☺) = 125

Désormais nous écrivons à la place, *en suivant l'ordre ci-dessus* : $5^3 = 5^2 \times 5^1 = 5^{2+1}$ (=125)

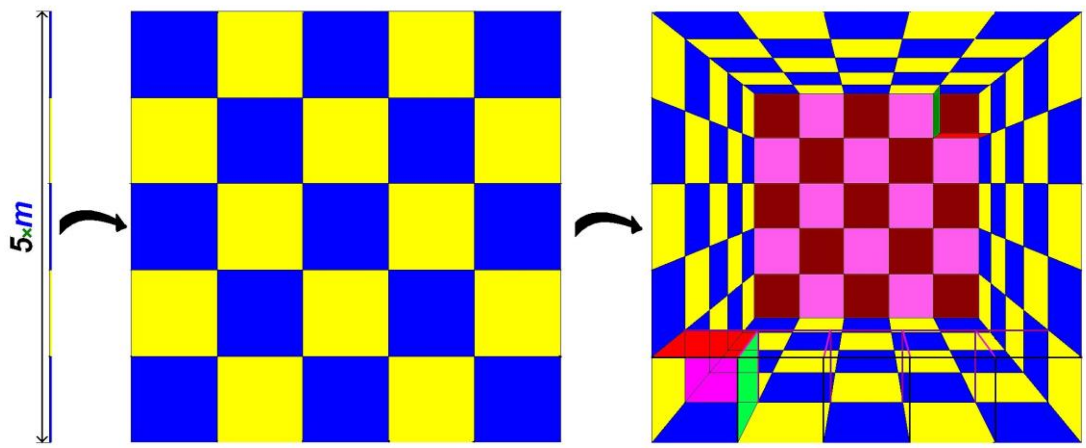
- Les petits chiffres … *à l'étage au dessus* (en rouge ici) sont appelés « exposants »

Nous constatons que si au « plancher des vaches » on multiple,… à l'étage au dessus, on additionne !

Comprenons : Au fur et à mesure qu'on multiplie une grandeur par elle-même, on rajoute de la dimension en quelque sorte à notre nombre de départ, en fait on lui rajoute *tout bonnement* de la puissance !

Cela s'illustre très bien, en nous limitant à la puissance 3 comme les 3 dimensions de notre espace commun :

grandeur... à la Puissance 2 = "au Carré" ... à la Puissance 3 = "au Cube"



(Exemple...) $(5\times m)^2 = 5^2 \times m^2 = 25\times m^2$ $(5\times m)^3 = 5^3 \times m^3 = 125\times m^3$

Les unités se multiplient toujours aux valeurs pour former les grandeurs, donc mêmes règles de puissance !…

Et de surcroît, nous avons exploité cette règle supplémentaire : $(a\times b)^n = a^n \times b^n$, quelque soient a, b ou ^{n}

- Certes, il y aura parfois des restrictions, pour a et b, à être positifs au départ, si les exposants ne sont pas entiers (car oui ! nous allons voir également que nous pouvons employer des exposants quelconques…)
- En passant à l'étape supérieure, nous pouvons également multiplier à l'étage au dessus ! Voyons voir avec l'exemple étendu suivant : $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 125 \times 125 = 15\,625$

Nous écrivons cette fois-ci : $5^6 = 5^3 \times 5^3 = 125^2 = (5^3)^2 = 5^{3\times2}$ …

Cette fois-ci, nous voyons que c'est la règle suivante qui s'applique : $(a^n)^p = a^{n\times p}$, quelque soient a, ^{n} ou ^{p}

Certes, on ne peut plus « visualiser » des puissances *assimilées à des dimensions* – supérieures à 3 – ou à la rigueur 4 avec plusieurs figures au cours du temps (la 4ème dimension !) aussi, il faut se contenter de faire de la simple arithmétique, où il n'y a plus de limite dans l'abstraction…(?).

On peut même s'amuser avec les « mises en abîme »… qui préfigure le « monde fractal » *(bientôt !…)*
Exemple avec $(((((\dots(2^2)^2)^2)^2)^2\dots)$ qui s'écrit à la place des 2×n parenthèses : 2^{2^n} !…
5 paires de parenthèses et ce nombre vaut déjà 2^{32} (puisque $2^5 = 32$) soit déjà plus de 4 milliards !

- En conclusion : l'écriture avec puissances permet de condenser considérablement celle des nombres.
  N'oublions pas, par ailleurs, que notre écriture « décimale » inclut implicitement les puissances de 10
  Exemple 2019 est bien le nombre : $2\times10^3 + 0\times10^2 + 1\times10^1 + 9\times10^0$ (soit $2\times1000 + 0\times100 + 1\times10 + 9$)
  - Remarquons au passage qu'à l'élément neutre **1** de la multiplication (également celui de la division) correspond l'élément neutre **0** de l'addition (idem pour la soustraction) pour les exposants.
  - A une progression « géométrique » des nombres correspond une simple progression algébrique de leurs exposants associés

    On rappelle que l'exemple le plus évident est celui de notre système décimal et donc de notre base 10: $10^a \times 10^b = 10^{a+b}$… Chaque fois que nous progressons d'une unité (progression algébrique) à l'étage des exposants, notre nombre a été multiplié par sa base, à savoir ×10 (progression géométrique).

Extension au calcul de racines, et à celui des inverses !

La compréhension de du terme « racine » devient immédiate, lorsque nous nous référons aux (magnifiques n'est-il pas ? ☺) figures de la première page :

- Quelle est la « racine carrée » de la surface de 25 m² ou bien la « racine cubique » du Cube de 125 m³ ?

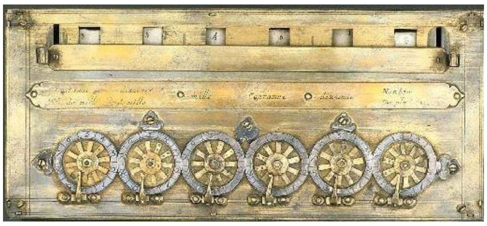
Réponse : le même côté de 5 m qui engendre ces deux figures…

Ainsi donc si nous écrivons $(5m)^2 = 25m^2$ et $(5m)^3 = 125m^3$, inversement $5m^{(1)} = (25m^2)^{1/2} = (125m^3)^{1/3}$, puisque « qu'à l'étage », nous avons bien $1 = 2\times1/2 = 3\times1/3$. Cela qui évite même de traîner les signes radicaux √ fastidieux… et bien entendu, cela vaut pour toutes les puissances sous forme de fraction !

- Comment s'écrit l'inverse de a ? Puisque a peut s'écrire a^1, son inverse permet la division « à terre », et donc « à l'étage », l'opposé de 1 est –1 : conclusion, $1/a$ s'écrit a^{-1} et, $1/(a^p)$ s'écrit $(a^p)^{-1} = a^{-p}$ pour tout ^{p}

Vers le calcul simplifié…

Puisque pour le commun des mortels, manier des additions (à la limite des soustractions) était préférable de loin à faire des multiplications vite fastidieuses… (sans parler des divisions !) des scientifiques commencèrent à réfléchir à des astuces pour substituer ainsi l'addition à la multiplication



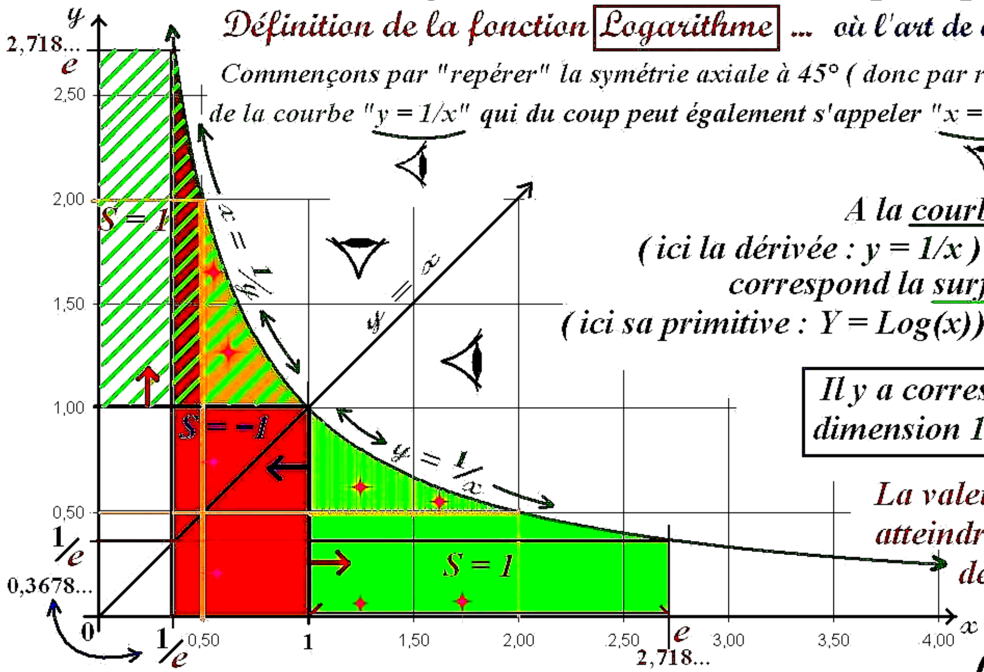
*Cependant, il faut croire que les additions peuvent également s'avérer fastidieuses puisque Blaise Pascal (1623-1662) vint en aide à son père en assemblant pour lui, dès l'âge de 20 ans, l'ancêtre de toutes les calculatrices – la « **Pascaline** » – qui se « contentait » de faire mécaniquement des additions et soustractions, mais également des conversions d'unités (monétaires entre autres).*

Or, une autre piste était explorée depuis la fin du siècle passé : étendre la correspondance discontinue, à savoir entre exposants entiers et nombres obtenus par une base, élevée à la puissance de ces exposants,… à une correspondance continue, à partir d'exposants réels, ne serait-ce que décimaux…
Concrètement, nous savons faire correspondre 2 à 100 avec 10^2 mais qu'en est-il de $10^{3,14\dots}$, où l'exposant ne s'obtient même pas par une fraction simple ?…
*Environ à la même époque, un suisse Joost Bürgi (1552 – 1632) qui fut l'horloger assistant des astronomes Brahé et Kepler, et un écossais John Napier (1550-1617) « dit Neper » par la «confrérie» des mathématiciens, travaillèrent à élaborer une fonction continue, où du moins l'élaboration de tables de correspondance qui furent alors appelées, lors de la publication par Neper le premier, … **tables de logarithmes**.*

Les logarithmes : des nombres qui « parlent »

Définition de la fonction $\boxed{\text{Logarithme}}$ *… où l'art de changer de dimension…*

Commençons par "repérer" la symétrie axiale à 45° (donc par rapport à la droite "y = x")
de la courbe "y = 1/x" qui du coup peut également s'appeler "x = 1/y" (dépend du point de vue !)



A la courbe de la fonction
(ici la dérivée : y = 1/x) (respectivement : x = 1/y)
correspond la surface engendrée
(ici sa primitive : Y = Log(x)) (respectivement : X = Log(y))

Il y a correspondance entre une dimension 1 et une dimension 2

La valeur de la surface balayée va atteindre... 1 pour une certaine valeur de x (resp. y) égale à e = 2,718...

Y(x) primitive de la fonction $y(x) = 1/x$
équivaut à la Surface contenue
entre la courbe et l'axe des abcisses x

X(y) primitive de la fonction $x(y) = 1/y$
équivaut à la Surface contenue
entre la courbe et l'axe des ordonnées y

$$\boxed{Y(e)} - Y(1) = Y(e) = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx \; \boxed{= S = 1 = \mathcal{L}og(e)}$$

(par convention : Y(1) = 0)
X(1) = 0)

$$\boxed{X(e)} - X(1) = X(e) = \int_1^e \frac{1}{y}\,dy \; \boxed{= S = 1 = \mathcal{L}og(e)}$$

La Symétrie est bien respectée jusque dans le calcul de la Surface, en intervertissant les axes

Par contre, si on échange les valeurs aux bornes (de l'intégrale donc de la surface) :
soit $e \longrightarrow 1/e$ *et* $1 \longrightarrow 1/1 = 1$ *alors on va créer une Anti-Symétrie :*

(peu importe) **X ou Y ou même …** $T(1/e) = \int_1^{1/e} \frac{1}{t}\,dt \; \boxed{= S = -1 = \mathcal{L}og(1/e)} \; \boxed{= -\mathcal{L}og(e)}$

Donc, en rebroussant chemin sur un des axes, on a créé une surface négative, juste opposée à la première… On vient en quelque sorte de "passer de l'autre côté du miroir"…

☝ *Au cas où vous ne le sauriez pas, Lewis Carroll (1832-1898) était également… mathématicien*
comme quoi Mathématiques et Poésie (ou Romantisme) ne sont pas antinomiques …

En résumé : Multiplier (ex: 1 par *e* qui fait *e*) fait progresser positivement la surface vers la droite (vers les +)
Diviser (ex: 1 par *e*, équivalent à multiplier par son inverse) la fait rebrousser à gauche (vers les –)

Application : multiplier 2 par son inverse 1/2 fait 1 : la surface a progressé vers la droite et rebroussé d'autant jusqu'à son point de départ [Ainsi l'équivalent Log(2 × 1/2) = Log (2) + Log(1/2) = Log(2) – Log(2) = 0]
Au contraire, multiplier 2 par 2 fait 4; on progresse deux fois vers la droite, soit Log(4) = 2 × Log(2)

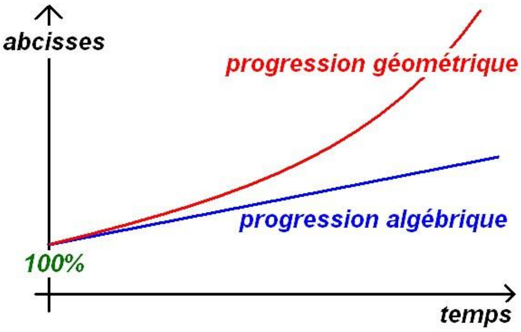
Conclusion : Nous devrions comprendre un peu mieux ce que signifie les Logarithmes grâce à l'illustration par la correspondance entre la courbe et sa surface engendrée…
La multiplication (respectivement division) - ex : entre les coordonnées - se traduit par l'addition (respectivement soustraction) de surfaces ou logarithmes

Nous venons tout simplement de ré-inventer, illustrer le principe de la Règle à Calcul !

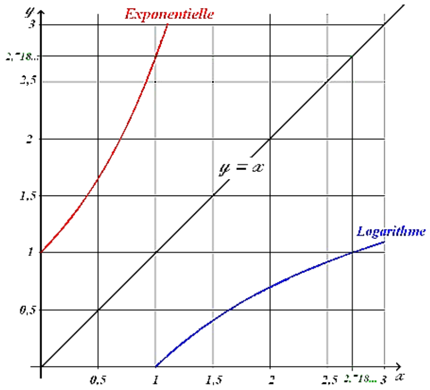
Petits rappels historiques sur l'élaboration des logarithmes

Nous avons vu précédemment que Neper avait mis au point les tables de logarithmes. Comment a t-il fait ? . en procédant à un des premiers calculs infinitésimaux de l'histoire, en tout cas avant Newton et Leibniz

Il a raisonné sur le déplacement d'un objet (qu'il soit céleste ou tout simplement terrestre) en considérant que l'un était animé d'une vitesse constante – et par conséquent était animé d'une progression algébrique en fonction du temps – que l'autre était animé d'une vitesse qui progressait au fur et à mesure de son avancement – et là, la progression est géométrique !



Rappel :



< De même, voyons la symétrie entre la courbe exponentielle inverse de la courbe logarithme

A partir de là était née la fonction (ou même famille de fonctions) qui permettait d'écrire : $f(a \times b) = f(a) + f(b)$ et permettre alors le processus indirect *suivant* pour obtenir le résultat d'une multiplication :

a et b transformés en f(a) et f(b) qui sont additionnés et dont le résultat par transformation inverse (en fait par l'exponentielle) redonne (a × b)

Il s'agit bien d'une famille de fonctions puisque nous parlons de logarithme à base donnée

- Le logarithme historique est le logarithme dit népérien qui à Log(x) fait correspondre l'inverse e^x où le nombre **e** *est le nombre de Neper (on peut également retenir : **e** comme « exponentielle »)*
- Les autres logarithmes sont ceux qui choisissent un autre nombre comme base et s'écrivent dès lors :

$$\log_a(x) \text{ inverse de } a^x$$

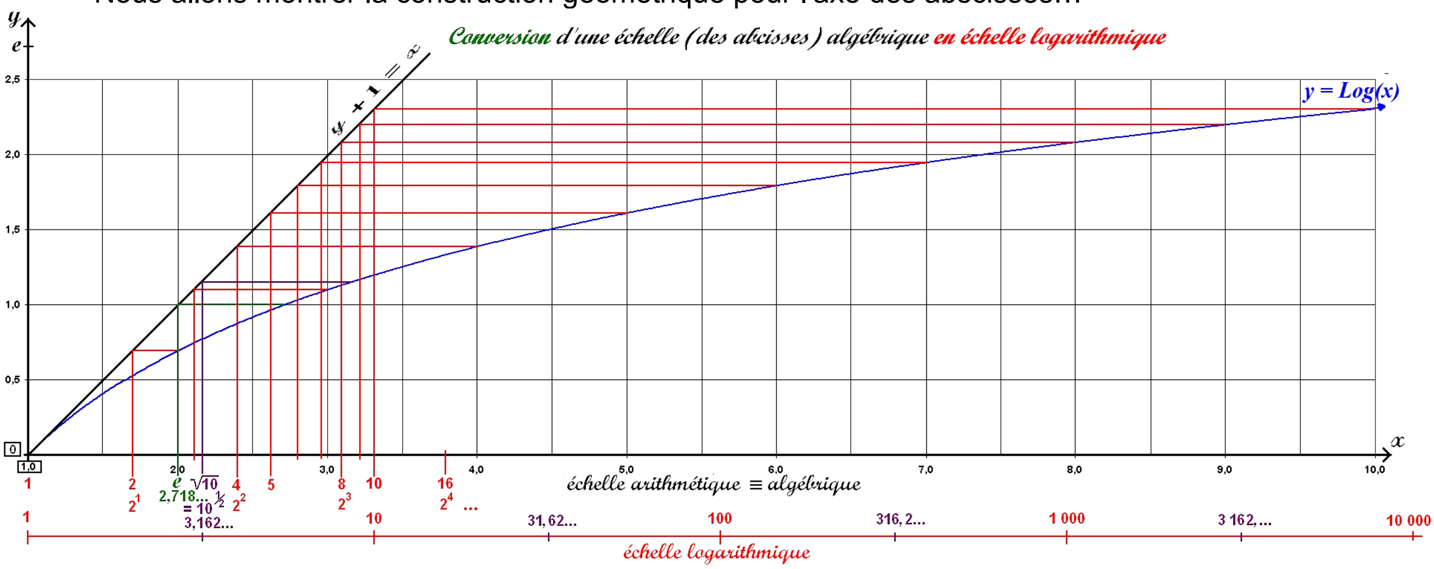
le plus commode de ces logarithmes est bien entendu $\log_{10}(x)$ inverse de 10^x

- Passage d'une famille à l'autre immédiat : $\log_a(x) = \mathbf{Log}(x) / \mathbf{Log}(a)$ et inversement $a^x = e^{\text{Log}(a) \times x}$
- Par principe des fonctions inverses : $a^{\log_a(x)} = \log_a(a^x) = x$ pour tout a et pour tout x positif

Principe de conversion d'une échelle algébrique vers une échelle « logarithmique »

Lorsque nous sommes en présence d'une fonction dont les points peuvent s'étendre sur des plages importantes de valeurs, il peut être commode pour la lecture du graphique d'en adapter l'échelle…

Nous allons montrer la construction géométrique pour l'axe des abscisses…



- ➢ Nous remarquons alors le déplacement de l'Origine des axes puisque par définition **Log**(1) = 0

  Toute courbe de la forme y = k × Log(x) sera projetée sur une droite avec le repère logarithmique des x
- ➢ Cette conversion peut être effectuée sur l'axe des ordonnées y, et dans ce cas, par symétrie par rapport au dessus, toute courbe d'équation $y = k \times a^x$ sera ramenée à une droite sur le graphique…

Quelques applications des logarithmes…

- Nous retrouvons la simplification des divisions par celles des soustractions

Nous rappelons que diviser un nombre «a» par un autre «b» revient à multiplier «a» par l'inverse «1/b»

- Donc le passage aux logarithmes (expliqué en page 3 par les surfaces engendrées) nous fait poser :
$\boxed{\text{Log}(a / b)}$ = Log (a×(1/b)) = Log(a) + Log(1/b) = Log(a) + Log(b^{-1}) = $\boxed{\text{Log}(a) - \text{Log}(b)}$

Voilà ! Au même titre que la multiplication des nombres est allée s'accorder avec l'addition de leurs Log la division est allée s'associer avec la soustraction des Log ; on change donc simplement de sens par rapport à l'addition(>multiplication), ce qui est plus simple que faire « je pose b, je retiens c, et… et zut ! »

- Par extension… $\boxed{\text{Log}(a^n) = n \times \text{Log}(a)}$ quelque soit ^{n} positif ou négatif (au même titre qu'il suffit de compter tous les a ou bien leurs inverses multipliés entre eux…)

- De la Musique et des Décibels…

- *Nous avons beaucoup insisté sur l'obtention de la gamme harmonique par la répartition des tons (12 demi-tons qui couvrent l'octave soit un ½ ton égal à $(2)^{1/12}$ ~ 1,059…et les 7 notes de Pythagore qui font 6 tons)*
- Les décibels expriment la puissance sonore et… la physiologie de notre oreille qui dit à notre cerveau : « ah oui, avec 10 violons au lieu d'un seul, je sens bien la différence : 10 décibels de plus ! »

10 décibels représentent ~~10~~ × 1/~~10~~ de Bel = 1 Bel, unité acoustique d'une Puissance relative. A quoi ? A une référence ultime de *Son infime* qu'une oreille la plus exercée puisse percevoir avec silence absolu !…

Rappelons que le « Son » est en réalité un phénomène de propagation, donc une onde qui alterne les dépressions et surpressions du milieu élastique de l'air, et qui parvient à nos tympans d'oreille…

Qui dit surpression dit pression exprimée en unités « pascals » La pression la plus infime perceptible a été mesurée à 2×10^{-5} pascals. Par ailleurs, la Puissance sonore est proportionnelle au carré d'une pression : Donc une surpression de 1 pascal (faible devant la pression atmosphérique de 100 000 = 10^5 Pascals) est $(1/(2\times10^{-5})$ soit ½ × 10^5 (ou 50 000) fois plus forte ; et la **Puissance** au carré est (¼ **×** $\mathbf{10^{10}}$) fois plus forte

Le Bel, unité puissance acoustique s'obtient en passant aux logarithmes décimaux (à base 10) :

Ainsi, une $\boxed{\text{surpression d'1 pascal}}$ produit un Son de : $\log_{10}$ (¼ **×** $\mathbf{10^{10}}$) = ($\log_{10}$ (¼) **+** $\log_{\cancel{10}}$ ($\cancel{10}^{10}$)) en Bels

Soit après simplification : **-** $\log_{10}$**(4) + 10** = -0,6 + 10 = 9,4 Bels = $\boxed{94 \text{ dB}}$ ce qui est déjà tout un orchestre !

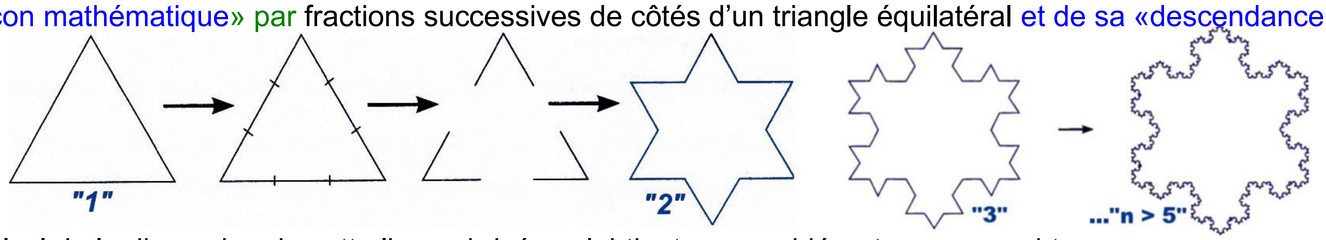
- Les dimensions au sein du monde fractal

Le concept de « fractale » apparaît en 1975 avec l'ouvrage du français Benoit Mandelbrot (1924-2010) qui évoque la « forme, le hasard et la dimension ».

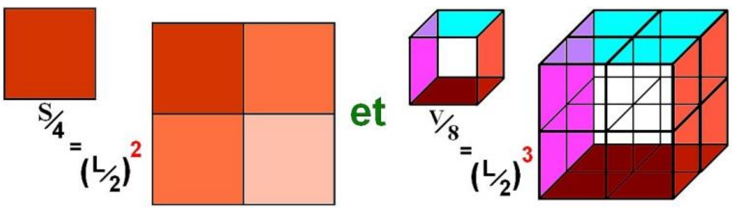
Comme la définition de cette nouvelle classe d'objets mathématiques semble un peu « floue », Mandelbrot se réfère en 1982 à la dimension généralisée qui peut s'avérer comprise entre la dimension habituelle d'une frontière et celle de son contenu.

Exemple : Ce **flocon de neige** peut-être délimité par un pourtour dont la dimension serait comprise entre 1 et 2 alors qu'un cercle, ligne curviligne régulière, est de dimension 1 (au même titre qu'une ligne rectiligne) et s'avère être la frontière d'un disque qui couvre une surface de dimension 2 par définition.

Pour le comprendre, il faut rappeler l'intuition du mathématicien suisse Koch (1870-1924) qui reconstitue un «Flocon mathématique» par fractions successives de côtés d'un triangle équilatéral et de sa «descendance»



Le calcul de la dimension de cette ligne «brisée» s'obtient en considérant que nous obtenons…
4 segments pour un fractionnement en 3. Rappelons qu'avec des figures conventionnelles comme suit, le fractionnement du côté en 2 par exemple donne un volume 2^3 = 8 fois plus petit, et surface 2^2 = 4 fois plus petite…la longueur est bien 2^1= 2 fois inférieure



La dimension s'obtient par le passage aux Log :

2^d = 2 pour la longueur soit d = Log 2 / Log 2 = 1

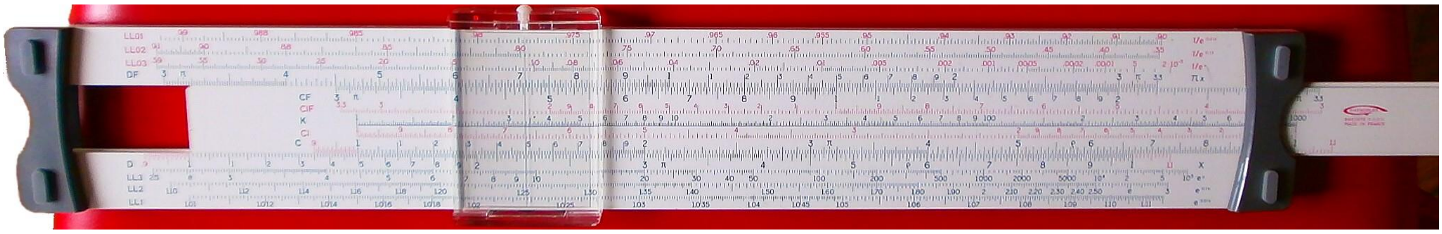
Le flocon de Koch, a une ligne brisée qui pose :
3^d = 4 soit la dimension d = Log 4 / Log 3 ~ 1,262

Il va sans dire qu'une surface fractale (avec fort relief) aura quant à elle une dimension comprise entre 2 et 3 !

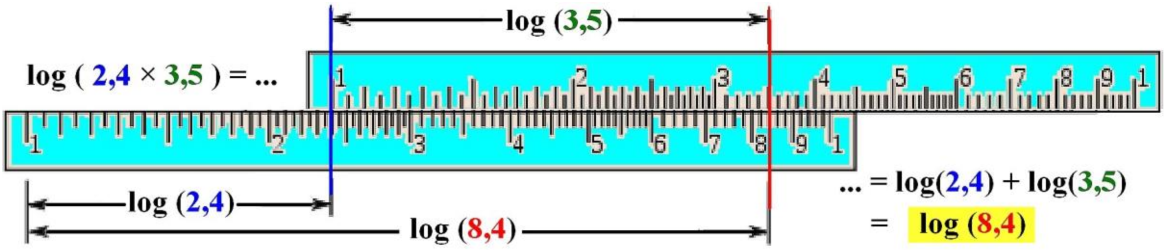
Les objets mathématiques : outils d'orfèvre pour le goût de la précision scientifique

❖ La Règle à calcul

A la suite des bouliers qui ont perduré depuis des millénaires (*jusqu'à nos jours sous forme ludique*), les premières règles à calcul apparaissent au début du XVII^{ème} siècle, dans la foulée de l'invention des logarithmes, avant d'adopter également des formes circulaires (sur cercles concentriques bien entendu). qui iront se retrouver sur les cadrans de montres d'aviateur, en particulier…



Ici, une règle professionnelle qui, repliée, fait 30 cm de longueur



Principe de calcul (par mesure) basé sur les propriétés des logarithmes :

Opérations de multiplication et division se résument à des translations de réglettes (à droite et à gauche)

D'autres réglettes et multiples échelles graduées permettent par lecture (parfois à la suite d'une conversion mentale) la lecture directe ou indirecte des carré ou cubes – inversement de leurs racines carrées et cubiques – ainsi que la lecture des fonctions trigonométriques, ou les conversions d'unités…

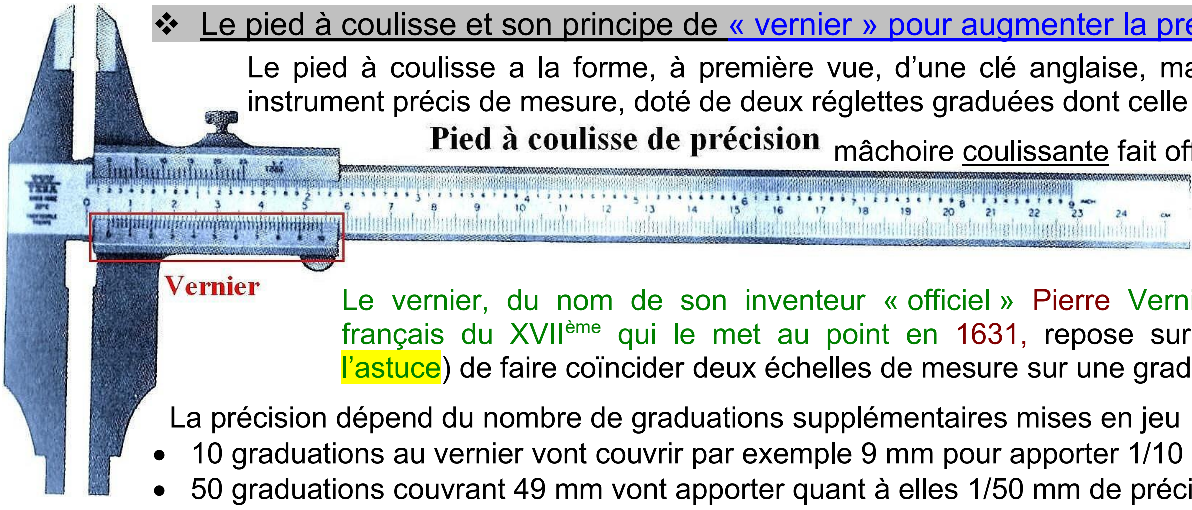
La précision des règles à calcul tient à leur qualité de fabrication, aux matériaux employés, et bien sûr à la finesse et rigueur de gravure.

Les règles à calcul étaient capables d'une précision de 1/200ème , voire plus précis encore avec certains rares modèles. Elles ne furent détrônées par les calculatrices que dans les années 80 car celles-ci pouvaient contenir de façon généralisée de la mémoire pour stocker des programmes entiers de calcul…

Mais pensez donc, que malgré l'apparition des premiers ordinateurs de bureau dans les années 60, c'est avec ces instruments « analogiques » que furent exécutés tous les calculs de détermination des missions spatiales à destination de la Lune !, avant la mise au point finale par ordinateurs qui occupaient tout un étage !

❖ Le pied à coulisse et son principe de « vernier » pour augmenter la précision

Le pied à coulisse a la forme, à première vue, d'une clé anglaise, mais c'est en fait un instrument précis de mesure, doté de deux réglettes graduées dont celle placée sur la mâchoire coulissante fait office de « vernier ».

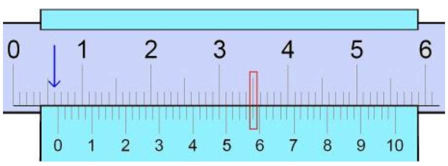


Le vernier, du nom de son inventeur « officiel » Pierre Vernier, mathématicien français du XVII^{ème} qui le met au point en 1631, repose sur le principe (voire l'astuce) de faire coïncider deux échelles de mesure sur une graduation commune :

La précision dépend du nombre de graduations supplémentaires mises en jeu :

- 10 graduations au vernier vont couvrir par exemple 9 mm pour apporter 1/10 mm de précision
- 50 graduations couvrant 49 mm vont apporter quant à elles 1/50 mm de précision

On détermine ci-dessous 6,58 mm



On se rend compte désormais que les Egyptiens devaient posséder cet « art » de la mesure, dès l'époque des Pyramides d'après les « étranges » graduations retrouvées sur leurs « coudées royales » (reproduction album de Jean-Pierre PETIT)

coudée d'Amenhetep (–1559;–1539) exposée au Louvre

Les nombres Complexes

Synthèse trigonométrique et vectorielle

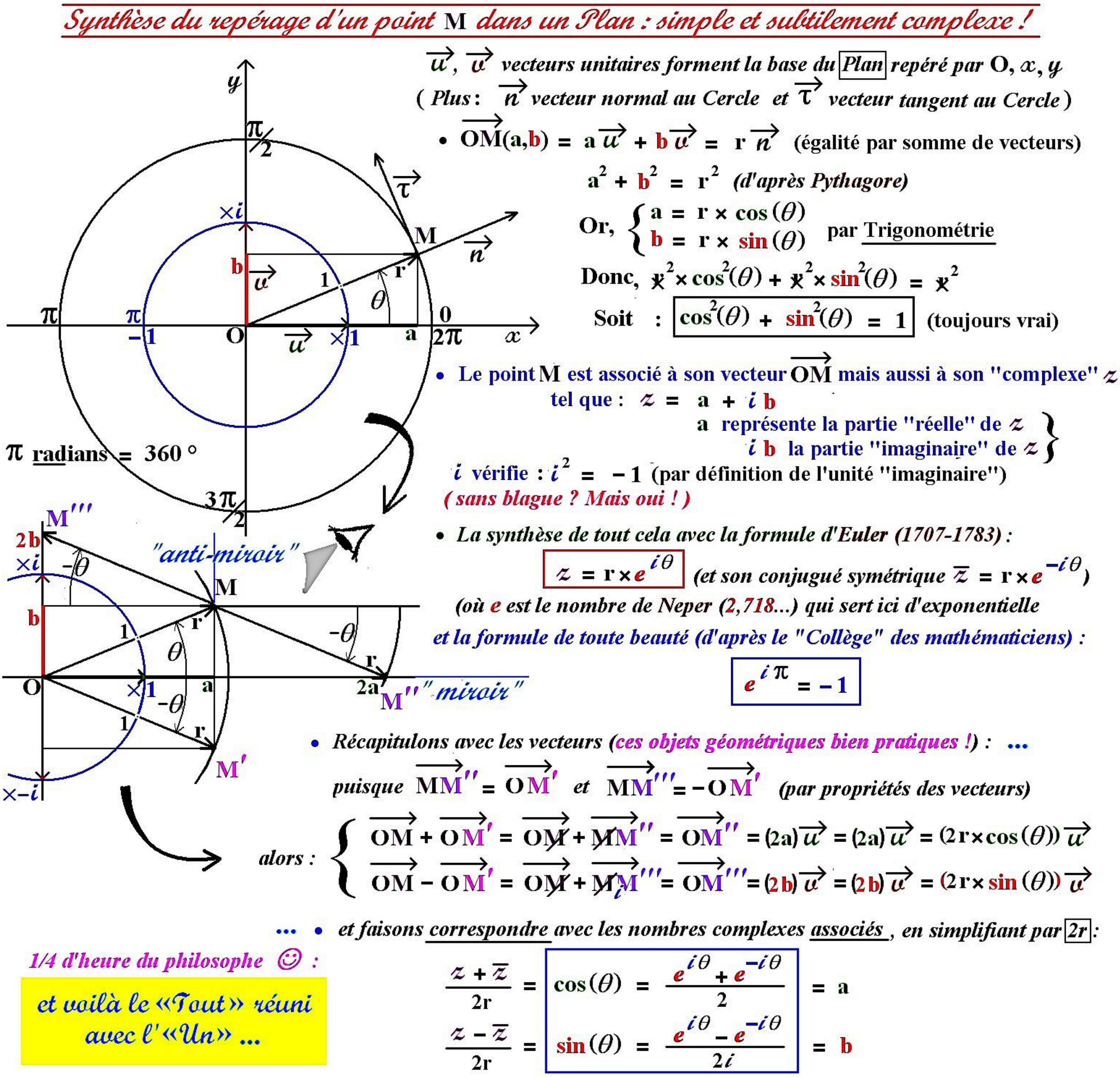
Après les nombres entiers, positifs ou négatifs, puis les fractions, puis les réels , transcendants, voici le stade encore plus complexe : les nombres « complexes » appelés à leur début « imaginaires » Pourquoi pas ?

Ces nombres ont été introduits au XVI^{ème} siècle pour fournir toutes les « racines » aux équations du 3ème degré

Ces nombres complexes notés par exemple « z » peuvent être décomposés en deux parties : une partie réelle et une partie imaginaire issue de la racine carrée de … -1 ! (alors qu'un carré habituel est forcément positif)

Le recours aux nombres complexes va connaître un formidable essor au XVIII^{ème} siècle pour gagner tous les pans de la discipline mathématique ainsi qu'à la ***Physique*** pour la formalisation de nombreux phénomènes…

C'est également au XVIII^{ème} siècle qu'on a l'idée de représenter dans un Plan ces nombres complexes en les associant à des points et à des vecteurs… Dès lors la convergence de nombreux concepts était en route…

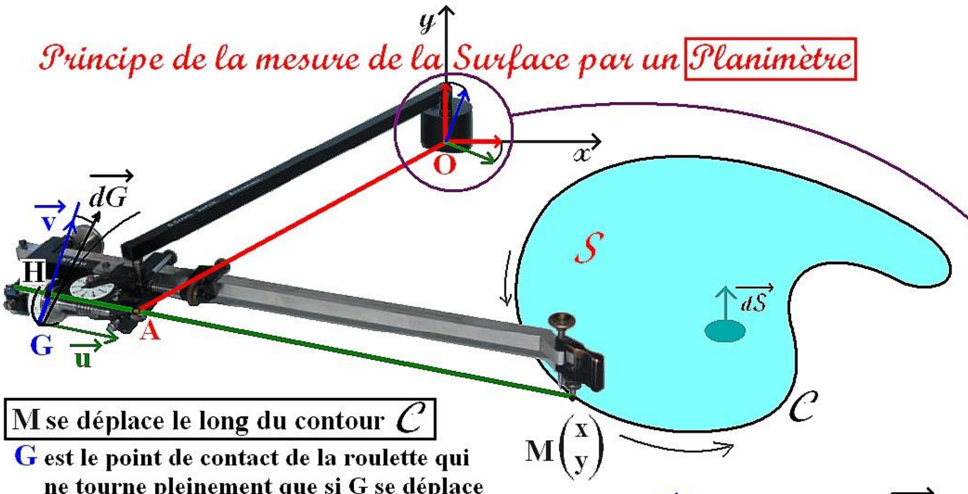


Leonhard Euler (1707-1783) fut l'un des très grands mathématiciens de l'Histoire. Ses travaux ont couvert de vastes domaines des Mathématiques comme de la Physique (en Mécanique générale, mécanique des fluides, mécanique céleste…). De plus, il a considérablement fait évoluer et rationaliser l'écriture des Mathématiques

Mesurer toute surface intérieure à une courbe fermée : Le planimètre

Puisque les longueurs et *segments courbes* sont mesurés à la règle ou au « *curvimètre* », serait-il possible de disposer d'un instrument capable de mesurer les surfaces quelconques, à condition qu'elles soient planes ?

Ce sont les grandes avancées mathématiques du XIX[ème] siècle et une réalisation d'orfèvre digne des meilleurs horlogers – *ou alors une astucieuse et simple conformation mécanique* – qui permit un tel exploit :

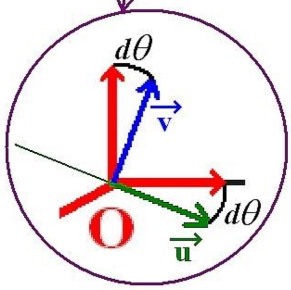


M se déplace le long du contour $\mathcal{C}$

G est le point de contact de la roulette qui ne tourne pleinement que si G se déplace perpendiculairement au bras (HM) traceur, donc selon $\vec{v}$ et la projection de $\overrightarrow{dG}$ sur $\vec{v}$

O est fixe et le bras polaire **OA** s'articule sur le bras traceur

Durant le parcours de M, A va parcourir un **Cercle** puisque **OA** fait office de Compas



⟶ *décomposition vectorielle :* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HM}$ $\qquad \overrightarrow{dM}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + b\,\vec{v} + a\,\vec{u}$$

dérivation : puisque O est fixe, $\left(\overrightarrow{dM} = d\,\overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{dG} = d\,\overrightarrow{OG}\right)$

$$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{dG} + b\,\overrightarrow{dv} + a\,\overrightarrow{du}$$

$$= \overrightarrow{dG} + b\,\frac{\overrightarrow{dv}}{d\theta}\,d\theta + a\,\frac{\overrightarrow{du}}{d\theta}\,d\theta$$

$$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{dG} - b\,\vec{u}\,d\theta + a\,\vec{v}\,d\theta$$

Rq : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires, donc leur projection réciproque est nulle ($\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$)

Quand **G** parcourt $\widehat{dG}$..., le parcours "efficace" de la roulette vaut $\overrightarrow{dG}\cdot\vec{v}$ (sa projection selon $\vec{v}$)

par ailleurs, $\vec{u}\cdot\vec{u} = 1$ et $\vec{v}\cdot\vec{v} = 1$ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires

Intégration curviligne : $\oint$

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{dM}\cdot\vec{v} \overset{(i)}{=} \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{dG}\cdot\vec{v} - b\oint_{\mathcal{C}} \underbrace{\cancel{\vec{u}\cdot\vec{v}}}_{0}\,d\theta + a\oint_{\mathcal{C}} \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}}_{1}\,d\theta$$

$\oint_{\mathcal{C}} d\theta = 0$ sur une intégrale curviligne, puisque on revient au point de départ en θ

L'égalité (i) se résume alors à : $\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{dM}\cdot\vec{v} = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{dG}\cdot\vec{v} =$ k tours de "roulette"

Or, $\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{dM}\cdot\vec{v} = \iint_{S} (\overrightarrow{rot}\,\vec{v})\cdot\overrightarrow{dS}$ Intégrale de Surface sur S intérieure à $\mathcal{C}$

(où $\overrightarrow{rot}\,\vec{v}$ est en quelque sorte le vecteur "tourbillon" engendré par $\vec{v}$)

= tout simplement : $k' \times S$

Conclusion : le nombre de tours de "roulette" du Planimètre est directement proportionnel à S

On peut également convertir la mesure directement, par proportionnalité, à une grandeur physique…

C'est ainsi que ce merveilleux instrument ressortit un jour des tiroirs d'un aérodynamicien néerlandais, pour que moi, jeune aérodynamicien attaché à la maquette de la Fusée Ariane 5 testée en soufflerie, puisse vérifier la conformité des premiers résultats d'essais… ***Universalité des Mathématiques faisant fi des frontières*** ☺

$$\underline{\underline{A}}\,\vec{X} = \vec{B}$$

Des équations et des hommes

Introduction

Pourquoi un tel titre ? Car, depuis l'aube des temps, les hommes n'ont pu ignorer ce que nous appelons désormais des « équations » et ces dernières ne pas exister sans les hommes…

« Fichtre ! » pourrait-on rétorquer…

Mais oui ! Nous cherchons, normalement tous, à comprendre le Monde qui nous entoure et, à en déterminer les inconnues, comme résoudre les problèmes qui se posent à nous.

De même, les équations ne sauraient être posées, sans tenir compte des hommes et des questions qu'ils se posent, car sinon, n'est-ce pas la fin de l'humanité ?

Définition(s)

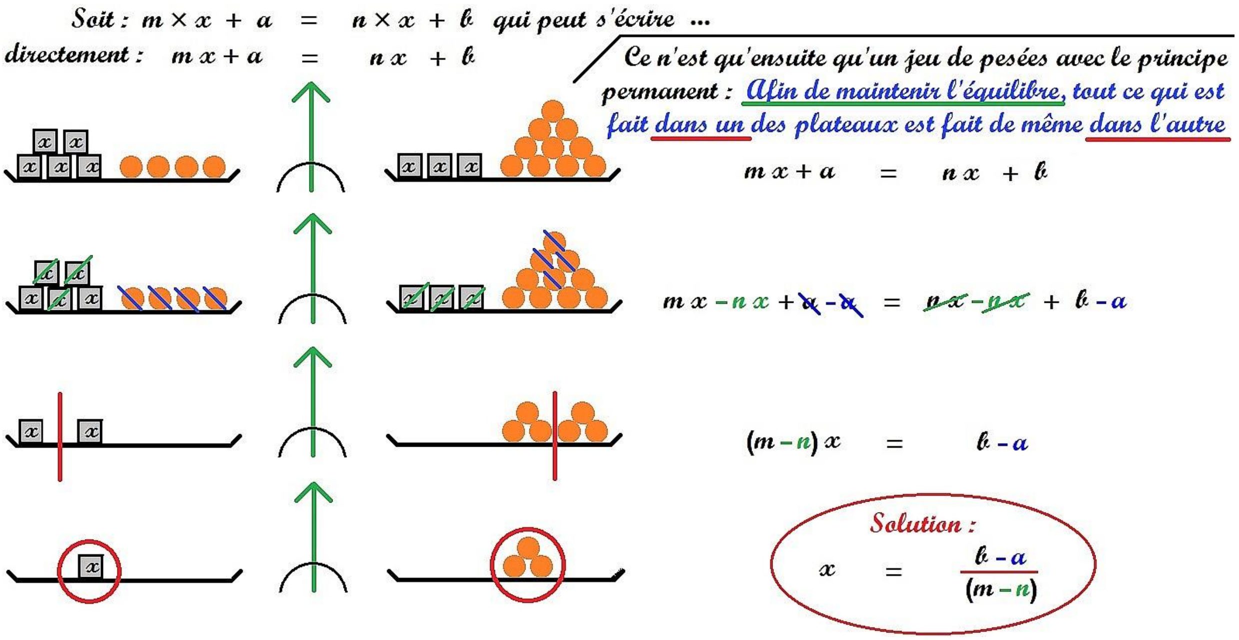
Que signifie donc étymologiquement **« équation »** ? Nous y reconnaissons la racine **« équ() »** qui signifie « égal » qui partage la même racine avec le mot **« équilibre »**, et enfin **«-ation »** est le terme féminin qui renvoie à l'action ou son à son résultat.

En somme, avec une « équation », nous cherchons à établir – ou rétablir – un « équilibre » – soit encore une égalité – qui nous permet de déterminer plus facilement les inconnues dans les interrogations et problèmes que nous nous efforçons de résoudre.

C'est ainsi que dans l'écriture (dont la modernité remonte au XVIe, voire au XVIIe siècle seulement) :

$$mx + a = nx + b$$

il apparaît que l'inconnue est désignée par la lettre x, et ceci peut s'illustrer par le schéma suivant :



La boite désignée par « x » est en quelque sorte la boite « mystère » …La pochette surprise, quoi ☺·!

Au départ le problème suivant se pose : Que trouve-t-on dans la boite… afin d'assurer l'équilibre… ?

C'est il y a 1200 ans, que le savant arabe **Al Khwarizmi (~780 ;~850)** – qui fut médecin, astronome, mathématicien… et dont le nom fut plus tard « occidentalisé pour désigner par **« Algorithme »** une suite d'instructions et opérations pour résoudre un problème à support mathématique – écrivit un ouvrage – à l'adresse de son souverain – pour réduire (simplifier) et résoudre de façon élégante divers problèmes par « la restauration et la comparaison » et dont le premier terme de l'expression fut occidentalisé en **« Algèbre »**

Ainsi, ce savant recommanda une suite d'instructions pour chaque problème « simple » à résoudre…

- Quand nous observons le **schéma ci-dessus**, nous voyons bien se détacher la suite d'instructions et méthodes adoptée selon le **principe fondamental** :

« Tout ce qui est fait dans l'un des plateaux de la Balance, doit être fait de même dans l'autre »

C'est ainsi que l'équilibre est assuré jusqu'au bout et qu'à la fin, ***x est isolé*** et … **déterminé** !

Au final, nous savons ce qui se trouve dans la boite, ou alors combien pèse-t-elle… ! ☺

Cette suite d'instructions qui se mettent ici sous forme d'équations (égalités), semble donc remonter au **IXème siècle**, à l'époque donc de ce savant arabe…

Mais Al Khwarizmi fut-il le premier à procéder de même ?

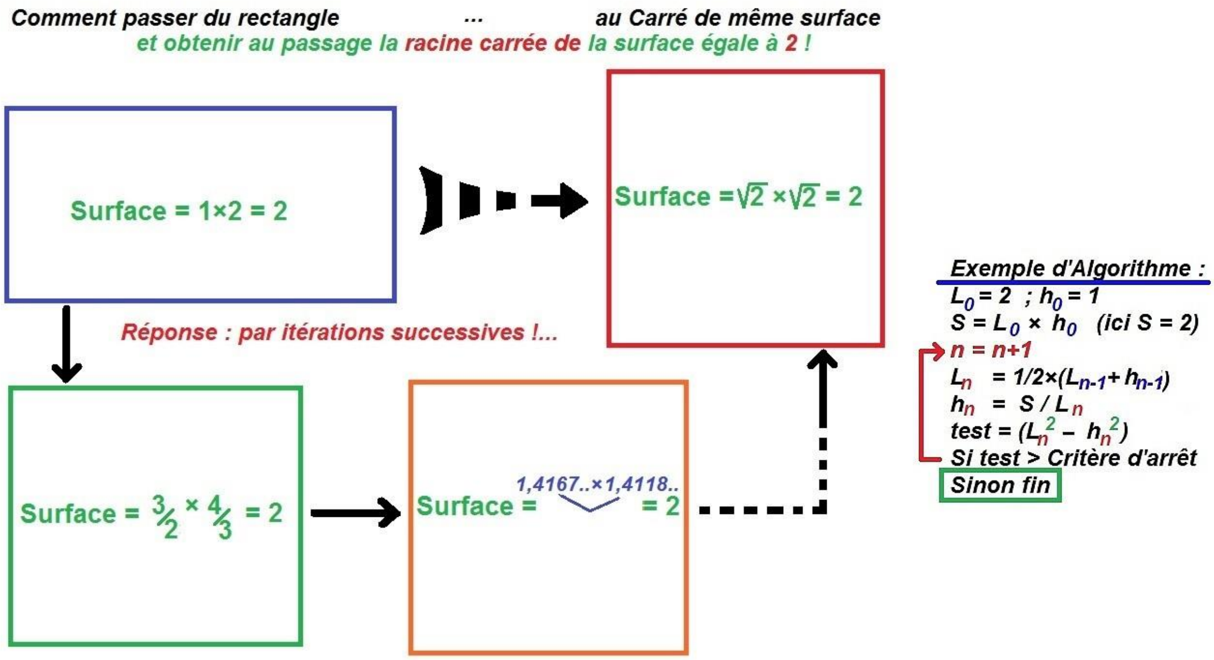
Il semble qu'on peut remonter en fait, à l'aube des civilisations, puisqu'on a fini par reconnaître sur une tablette mésopotamienne datée de…quatre millénaires (!) cette fois-ci une suite d'instruction de calculs itératifs (répétés donc en boucle) afin de…

Calculer la valeur du Carré de surface égale à deux unités…

Soit tout bonnement établir la **racine carrée de 2**, des siècles et des siècles avant notre « brave » Pythagore !

- Comment procédai(en)t donc cet (ou ces …) ingénieux savant(s) mésopotamien ?

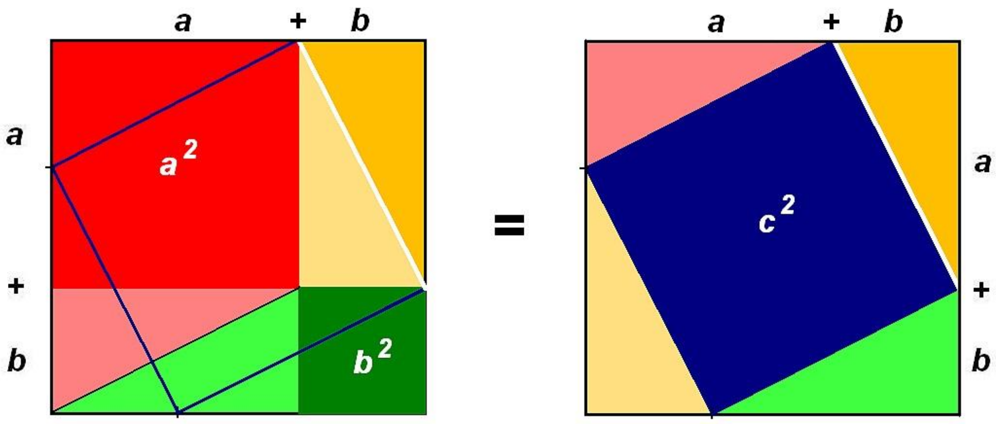
  En faisant preuve d'observation et d'astuce !



Un *informaticien programmeur* ne renierait pas un tel algorithme qui donne des résultats étonnants de précision, et ce dès la 3ème ou 4ème boucle de calcul.

Les mésopotamiens, qui calculaient (à la main, bien sûr !) ont ainsi obtenu la précision de la 6ème de nos décimales… Soit donc, pour les mésopotamiens qui utilisaient le système sexagésimal (***degrés, minutes, secondes…***) une **précision** de l'ordre de la **tierce** !

Mais puisque nous avons évoqué Pythagore (VIe siècle av J.C.) qui eut au moins le mérite de formaliser bon nombre de savoirs antérieurs pour les transmettre sous une forme d'écriture rigoureuse (à savoir les ***fondements des Mathématiques***) aux générations futures, voici une autre démonstration de ce qui demeure une des premières équations célèbres : **$a^2 + b^2 = c^2$**



$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \times (a \times b) \quad = \quad c^2 + 2 \times (a \times b)$$

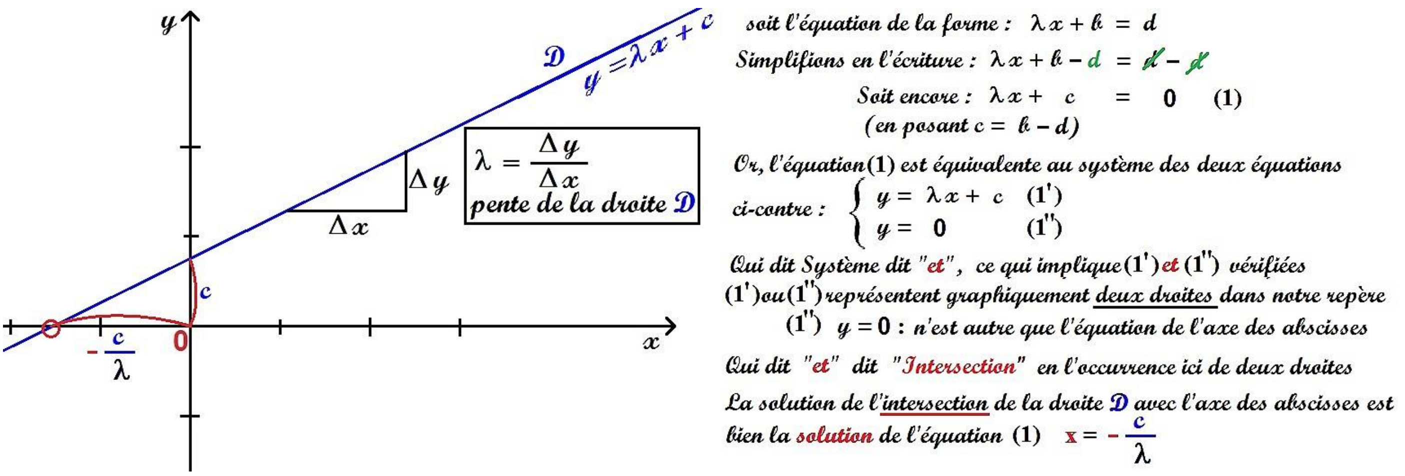
$$\text{donc} \quad \boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Les équations algébriques linéaires

Par de telles équations, nous entendons les équations (ou égalités donc) à une inconnue x qui se mettent sous la forme : « $\lambda x + b = d$ » ce qui équivaut à la forme « $\lambda x + c = 0$ » (ici, c = d – b)

Or, pour mieux ***comprendre*** la résolution et ***la portée*** de ce type d'équation, que nous avons déjà abordé en première page avec l'illustration des pesées successives, nous faisons intervenir la *géométrie* de base qui permet de représenter par exemple… des **droites** dans un **Plan** assorti de son **repère**…

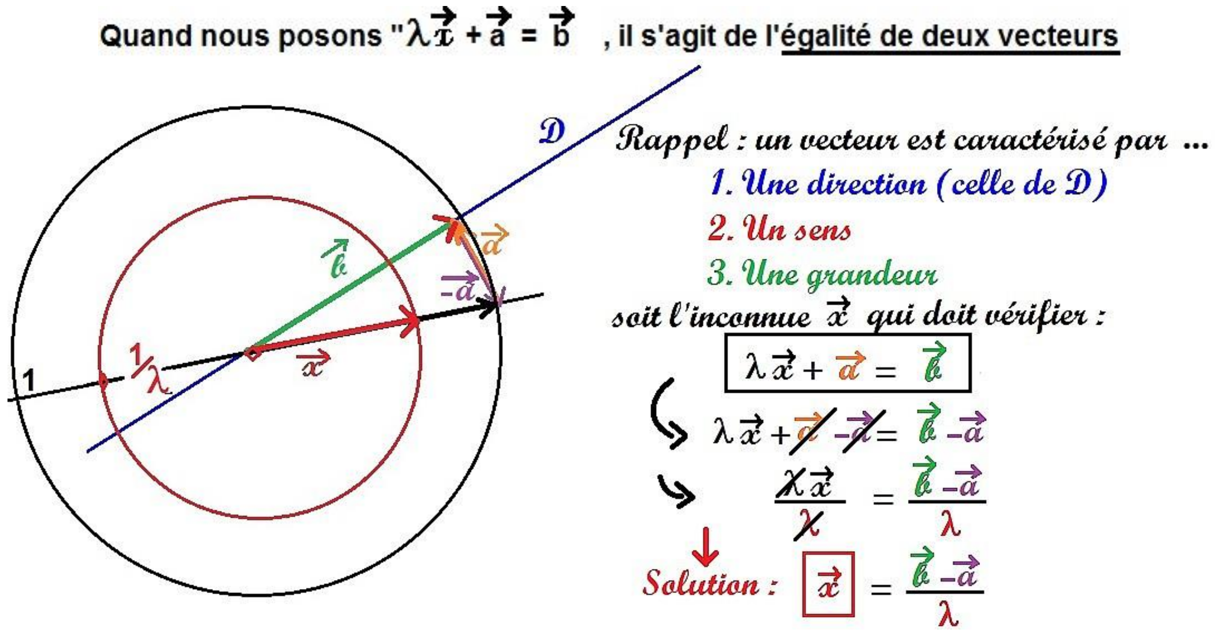
Nous allons Illustrer cette équation qui en fait, sous une apparence très simple, révèle beaucoup de subtilité…



Donc écrire $\lambda x + c = 0$ est bien utiliser une expression de y fonction de x **et** imposer y **= 0** d'où x à la fin

Est-ce tailler les cheveux en quatre ? Il s'agit simplement d'attirer votre attention sur la puissance des concepts mathématiques portés par une « ***toute simple*** » équation, à la façon par exemple d'une sonate de **Mozart** dite « ***facile*** » (la n°15) qui recèle en fait une profondeur d'idées comme de sentiments (!)

Aparté 1 : Introduction dans le Calcul vectoriel



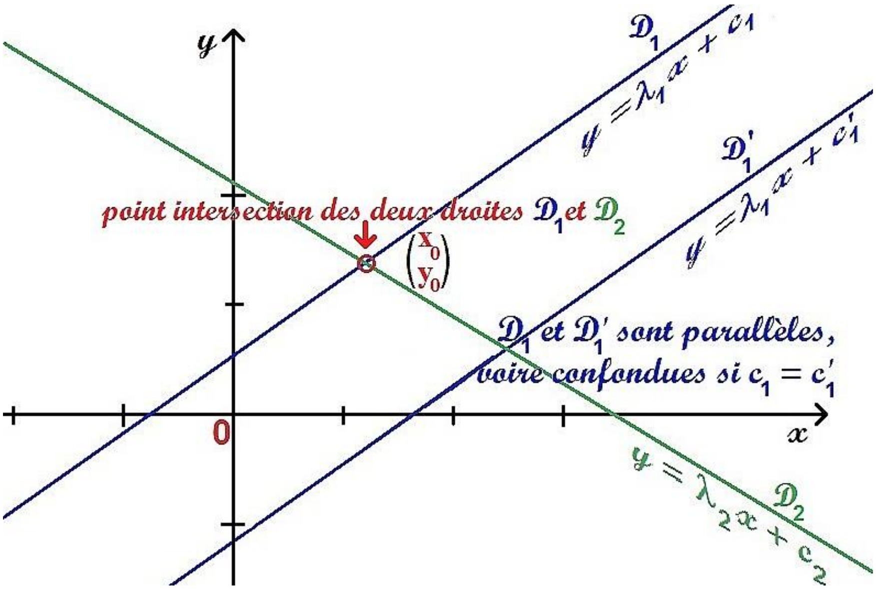
Nous voyons de nouveau que la simple expression « $\lambda x + a = b$ » n'a pas fini de nous ouvrir des horizons !

Cas général : système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y

Nous avons vu que le premier exemple de cette page introduisait en fait à la résolution de deux contraintes ou équations dans notre cas :

1. Les points M(x,y) appartiennent à une **droite** du plan définie par la relation simple entre x et y
2. Cette droite coupe l'axe des abscisses qui impose la deuxième contrainte $y = 0$ et détermine alors x

La généralisation de ce cas de figure est tout bonnement l'intersection de deux droites quelconques !..



Un système de deux équations à résoudre est illustré par l'intersection de deux droites dans le Plan que nous avons l'habitude de repérer.

Nous voyons deux droites (au choix) en couper une troisième

Deux de ces droites sont parallèles et adoptent ainsi une équation très proche (seuls c_1 ou c'_1 diffèrent)

Elles vont **couper** chacune à leur tour une troisième (deuxième en fait) droite en un **point** (x_0,y_0) qui est déterminé soit géométriquement, soit par la résolution du système à deux équations qui s'avèrent être les deux équations de droites « sécantes »

Quel est l'écriture de ce système d'équations ? Celui-ci : $\begin{cases} y = \lambda_1 x + c_1 \\ y = \lambda_2 x + c_2 \end{cases}$

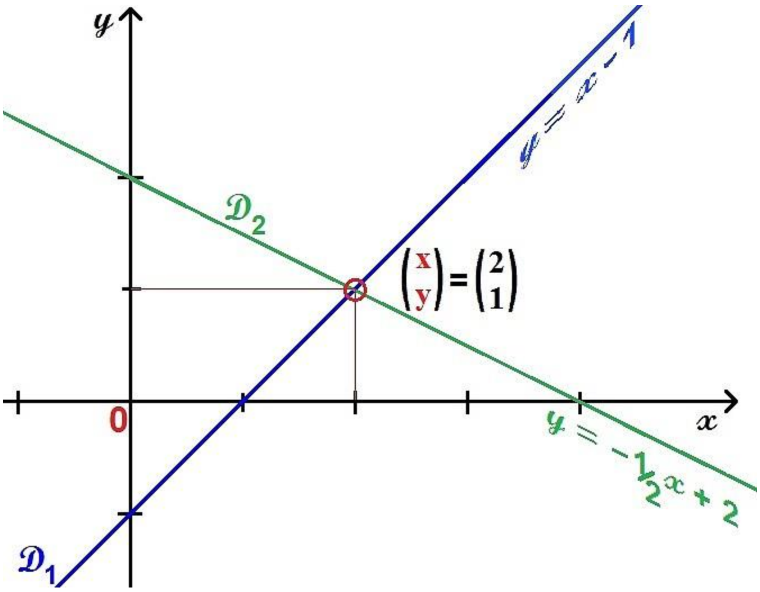
***Ou sous sa forme plus générale* :** $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$

- La **résolution** peut se faire au cas par cas :
  - Par exemple on peut, à partir de la première des deux équations exprimer y en fonction de x et le réécrire dans la seconde ; en partant de l'expression la plus simple, nous avons alors :

$\lambda_1 x + c_1 = \lambda_2 x + c_2$ … Nous retrouvons alors le chemin des « plateaux de la balance »

Ce qui après réduction et réarrangement (pour paraphraser ou presque Al Khwarizmi) donne :

$$x = \frac{c_2 - c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \textbf{puis ensuite...} \quad y = \frac{\lambda_1 c_2 - \lambda_2 c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \textbf{par l'une ou l'autre des équations}$$



Prenons un exemple illustré ci-contre :

Nous voyons et pouvons vérifier par le Calcul et la résolution de notre système de 2 équations à deux inconnues que c'est le point M (2 ; 1) dans le Plan qui est la solution.

Autrement dit nous obtenons x = 2 et y = 1

Cette façon de procéder découle dans la réunion de la Géométrie et l'Algèbre et prend le nom de :

Géométrie analytique

Nous pouvons admettre que c'est **René Descartes** qui en est l'instigateur au début du XVIIe siècle.

Mais nous aurons l'occasion de le retrouver un peu plus tard avec les équations du 2nd degré…

Une manière symptomatique est d'utiliser la résolution par la méthode de Cramer (1704-1752) qui pour le système écrit sous sa forme générale permet d'obtenir :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad ; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

Avec $\Delta x = c_1 \times a_2 - c_2 \times a_1$; $\Delta y = b_1 \times c_2 - b_2 \times c_1$; $\Delta = a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1$ à condition bien sûr que $\Delta \neq 0$, ce qui traduit graphiquement que les droites ne soient pas parallèles ou confondues, afin qu'elles se coupent !

Cas généralisé à l'espace : système de trois équations linéaires à trois inconnues x, y et z

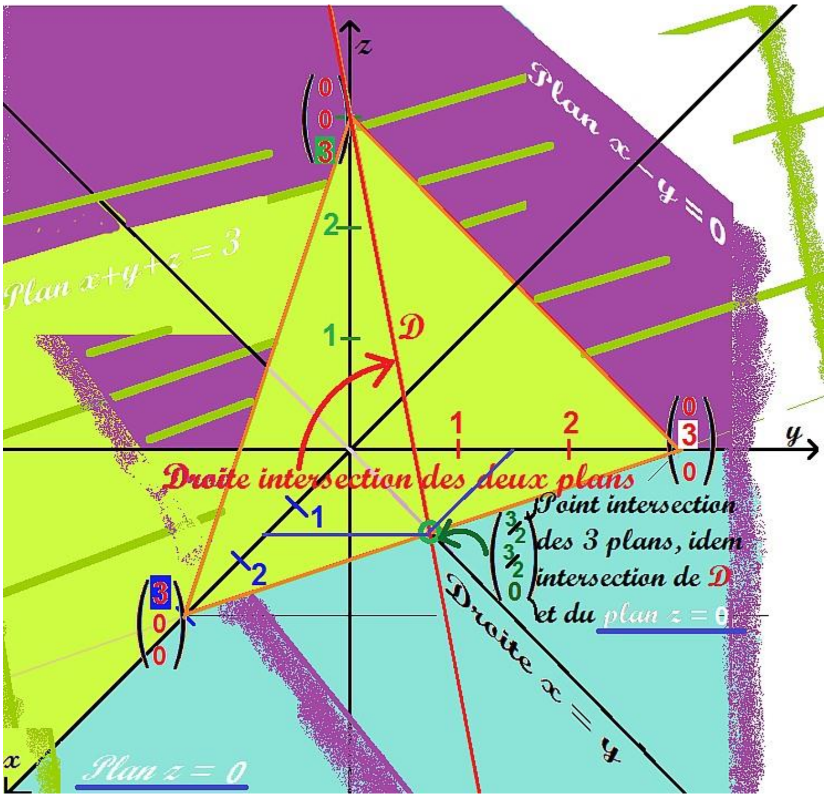
Ben tiens ! Pourquoi se gênerait-on ?...

Récapitulons :

- Avec la Pesée, nous avons manipulé des Objets qui peuvent être assimilés à des **points** de **dimension zéro** (*Mais si ! pensez par exemple à des billes de plomb*). Notre **balance** représente la **première dimension** de notre étude (*Pensez à une balance romaine avec poids suspendus au bout d'une « règle » plutôt qu'à la balance de « Roberval » à plateaux*)

Ah au fait : quelle est la différence entre un kg de plumes et un kilo de plomb ? … ☺ Croyez-pas ! La bonne réponse est : « Ça dépend !... Si on vous les balance du 3ème étage sur la tête, vous verrez la différence ! ☹

- Nous avons ensuite examiné l'intersection dans le **Plan** à **deux dimensions**, l'intersection de **droites** qui sont des objets à **une dimension** (le cas le plus général est celui des ***courbes*** à une dimension aussi) et qui se coupent en des **points** (dimension zéro) contenus également dans le Plan.
- Et bien faisons le grand saut dans l'**espace** à **trois dimensions** x,y,z qui va joyeusement permettre d'« intersectionner » les **plans** comme les **droites** et tout aussi bien ces deux classes d'objets ensemble !



Bon, accrochons nous à l'exemple illustré

- Le plan d'équation « **x – y = 0** » ce qui revient au même en écrivant « **x = y** » laisse le champ libre aux coordonnées z, ce qui en fait par convention avec notre repère un « Plan vertical » (violet)
- Par opposition au cas précédent, le Plan d'équation « **z = 0** » est un plan horizontal (ici représenté en bleu pâle) qui laisse libres les coordonnées x et y
- Le Plan particulier (couleur jaune vert) a pour équation « **x+y+z » = 3** »
  Nous voyons qu'il passe par les trois points (3 ;0 ;0) (0 ;3 ;0) et (0 ;0 ;3) (Triangle inclus dans ce plan donc
- L'intersection entre ce dernier Plan et le 1er donne la droite **« x = y » et « z = 0 »**
- L'intersection entre les deux premiers plans ? La droite **« 2x + z = 2y + z = 3 »**
- Entre ces deux droites ? Le point solution de **« 2x = 2y = 3 et z = 0 »**

Plus vous découpez, moins il vous en reste !

Vous voyez bien qu'on y arrive !

Pour trouver un point intersection, on peut résoudre doit résoudre un système de 3 équations à trois inconnues qui s'écrit sous la forme générale :

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

Là aussi, si on veut le faire de façon… systématique …Nous appelons Cramer !

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad ; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad ; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Logique, quoi !…Bien entendu, les expressions des déterminants se sont légèrement compliquées du fait de x,y, et z

Synthèse : Pythagore dans l'Espace !

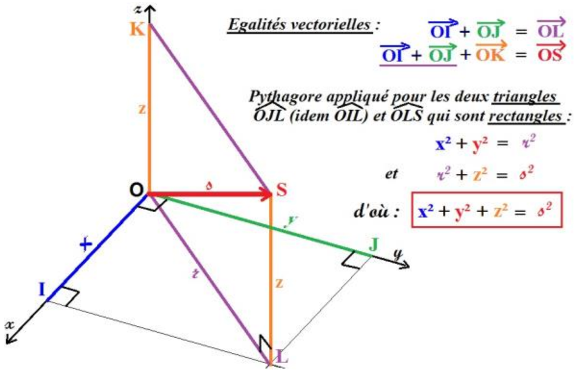
Non pas que notre brave homme se soit…envoyé en l'air !

Mais notre fameux théorème prend… de la hauteur !

Voyez comment !

Ne vous faites pas avoir par l'effet de perspective :

s est bien la plus grande longueur puisque s² = x²+y²+z²



Aparté 2 : Du Calcul vectoriel au Calcul matriciel

Additionner ou manipuler des **vecteurs** en grandeur, vous devriez savoir désormais faire…

Mais nous pouvons aussi leur faire subir toutes sortes de transformations :

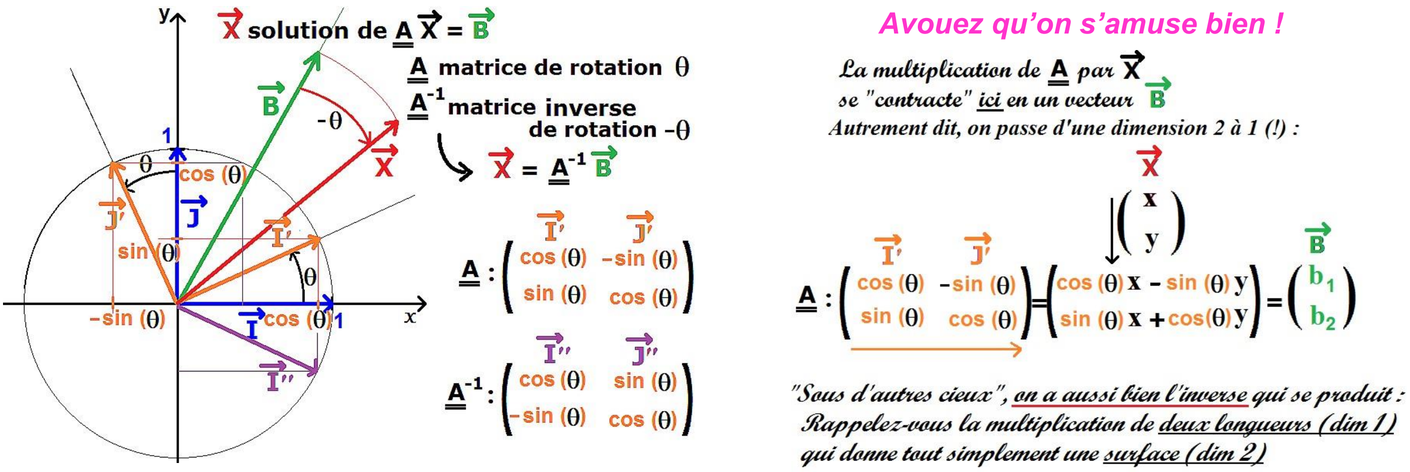
Homothéties *(où leur grandeur seule est modifiée)* ***Rotations*** *(avec grandeur conservée) et* ***Symétries*** *par rapport à un Plan (droite aussi bien) ou un point, voire combinaison de ces trois transformations de base.*

Pourtant, la combinaison des transformations quelle qu'elle soit, peut se résumer à l'écriture : $\underline{\underline{A}}\,\vec{X} = \vec{B}$

Cela ressemble pourtant bien à l'écriture toute simple de « a x = b » mais, attention ci-dessus, nous montons à la dimension supérieure !

$\underline{\underline{A}}$, appelée « Matrice » est un objet à 2 (ou même 3 dimensions, voire plus ultérieurement) qui manipule les vecteurs (que nous rappelons être des objets de dimension 1) au même titre que les repères Oxy ou Oxyz peuvent adopter une « Base » de 2 vecteurs ou 3 vecteurs respectivement.

Mais restons, pour simplifier dans le Plan (repère Oxy), pour étudier la transformation de base : une Rotation



Cela peut sembler compliqué au début pour se repérer, mais ensuite la résolution graphique est immédiate

Et nous voyons, que malgré le changement de dimension, il y a la même logique à trouver la solution de la simple équation « a x = b » qui nous donne : $\boxed{x = b/a}$ ce qui revient à la même écriture : $\boxed{x = a^{-1}\times b}$

- (Nous étions dans un **plan** à 2 dimensions qui contient aussi bien des **vecteurs** de coordonnées x et y, que des **droites** d'équation y = f(x) ou des **points** (x,y)

Or, l'opération de calcul matriciel **AX = B** revient bien à écrire :

- en dimension **2** un système de deux équation à deux inconnues x et y
- (en dimension **3** un système de trois équations à trois inconnues x, y et z)

Donc nous pourrions aussi bien représenter les deux ou trois droites qui se coupent (que nous n'avons pas représentées afin de ne pas surcharger le dessin) au point solution qui se situe tout bonnement *à la pointe de notre **vecteur solution**.*

Par conséquent, le calcul matriciel « en un seul bloc » va remplacer la résolution d'un système à «n» équations dans un espace à «n» dimensions. (*Puissant ! Non?*)

Remarque : La résolution par la méthode de Cramer, en dimension 2 ou 3 revient à calculer les opérateurs Δ, Δx, Δy, voire Δz… Et bien l'opérateur **Δ** par exemple, représente en dimension 2, la surface engendrée par les deux vecteurs de la matrice A, et en dimension 3, le volume respectivement engendré par les trois vecteurs d'une autre matrice A (elle-même objet, du coup respectivement, de dimension 3).

Remarque finale pour les résolutions de systèmes de n équations à n inconnues (si, si, ça existe)

Le calcul d'inversion de la matrice A (qui va donc contenir n lignes et n colonnes) peut s'avérer fastidieux à la longue, aussi, il sera adopté d'autres méthodes qui recourent à des **algorithmes** qui transforment la matrice initiale en *matrice « triangulaire »,* voire *diagonale* (pour faire apparaître de plus en plus de zéros) mais également des **algorithmes « *itératifs* »** (de la même famille, mais en plus compliqués bien sûr, que celui qui permettait d'obtenir progressivement le carré de surface 2 (!))

Beaucoup de mathématiciens, au cours des trois derniers siècles, ont contribué à développer toutes ces méthodes plus astucieuses les unes que les autres, qui s'appliquent selon la forme initiale des équations...

Résolution des équations à une inconnue x du second degré (voire plus si affinités…)

Equation « du second degré » veut dire qu'il y a présence dans l'équation de l'inconnue x qui peut-être élevée à la puissance 2, autrement dit, présence de carrés de x qui s'écrivent donc x^2.

La forme « canonique » de cette équation est « **$a\,x^2 + b\,x + c = 0$** » ou encore « **$x^2 + (b/a)\,x + (c/a) = 0$** »

Comme toujours, commençons par en rechercher le sens : ***Additionner** des objets… encore faut-il que ces objets soient cohérents entre eux ; que chacun de ces termes-objets additionnés soient équivalents…*

Reprenons notre argumentation préférée : lorsque vous entendez « carré », vous pensez à une surface

Ainsi « a x^2 » revient à rassembler « a » carrés (de côté x) ; « b x » revient à obtenir une autre surface (par exemple un rectangle) en multipliant le côté x par une autre longueur « b » ; enfin « c » est déjà carré en soi.

« ***Alors…*** », me direz-vous, « ***comment l'addition de surfaces peut-elle être nulle ?*** »

Il suffit de faire preuve d'un peu d'imagination, ou de rappeler *notre chère amie couturière qui découpe son « patron » jusqu'à épuiser la totalité du tissu dont-elle disposait* : autrement dit, découper est comme rajouter du tissu – ou une surface – négatif(ve).

Illustration et reconstitution de la méthode qui fut certainement adoptée, tout comme, par Al Khwarizmi …

$$\boxed{a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad (1)}$$ *pouvant être réduite par a …*

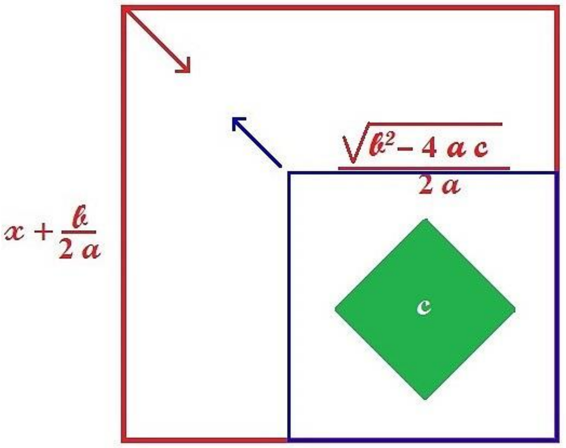
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (1')$$ *réécrite en …*

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 \quad (1'')$$

de la forme : $A^2 - B^2$

qui vaut par identité (voir épisode 2) $(A+B) \times (A-B)$

$$(1)\ \textit{équivaut à} : \left(x - \underbrace{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}_{x_1}\right) \times \left(x - \underbrace{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}_{x_2}\right) = 0 \quad (1''')$$



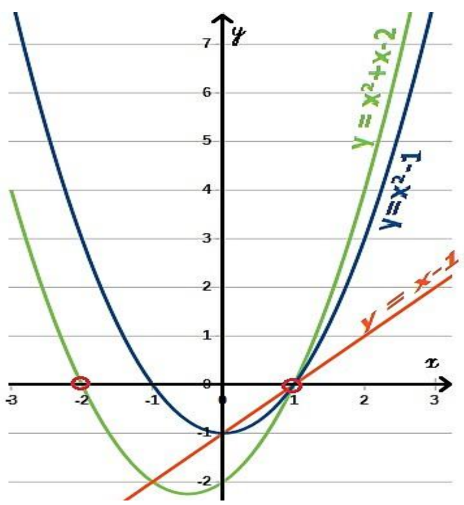
Interprétation

Le Carré rouge se fait "grignoter" par le carré bleu
ou bien le Carré rouge s'ajuste sur le carré bleu
a est un simple facteur multiplicateur
b est assimilé à une longueur au même titre que x
c représente déjà un carré, en tout cas une surface
qui peut être comptée négative (comme sur le dessin)
$\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *est le côté du carré bleu qui est découpé*
dans le Carré rouge de côté $x + \frac{b}{2a}$

Pour que ces deux carrés s'ajustent, c'est x qui doit tendre vers la solution x *de l'équation (1)*
soit donc $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1$ *ou* x_2, *deux valeurs distinctes ou confondues.*

Nous voyons comment progressivement l'équation a été réécrite au point de faire apparaître un « produit » (autrement dit une multiplication) de deux groupes sous la forme finale $(x - \mathrm{x}_1) \times (x - \mathrm{x}_2) = 0$.

Dans ce cas, l'équation (l'égalité avec zéro donc) n'est uniformément respectée que si l'un des deux groupes est nul, ce qui donne la clé de la solution : $(x - \mathrm{x}_1) = 0$ soit $\boxed{x = \mathrm{x}_1}$ ou bien $(x - \mathrm{x}_2) = 0$ soit $\boxed{x = \mathrm{x}_2}$



Voilà, nous avons raisonné avec des surfaces, mais progressivement, des mathématiciens ont désiré s'en affranchir, afin de « cogiter » plus librement, à commencer par notre cher **Descartes** (1596-1650) qui fut, nous l'avons dit, l'instigateur ou précurseur en *Géométrie analytique,* en faisant passer un cap dans l'abstraction …

C'est donc l'utilisation d'un plan et de son repère, afin d'y tracer le « graphe » des fonctions qui relient les coordonnées x et y, qui permet ainsi de visualiser l'évolution des fonctions.

La résolution de l'équation revient à poser $y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c = 0$

Ci-contre, nous avons $f(x)$ = « $x^2 + x - 2$ » dont nous reconnaissons que $x = 1$ permet d'obtenir $y = 0$, donc $f(x)$ s'écrit : $(x - 1) \times S(x)$…

C'est la division euclidienne de $f(x)$ par $(x - 1)$ qui donne $S(x) = (x + 2)$

Ce brave **Euclide** a rassemblé ses « éléments » 300 ans av. J .C.

Les équations différentielles

(Qui elles, osent tout : relier fonctions, dérivées et variables !)

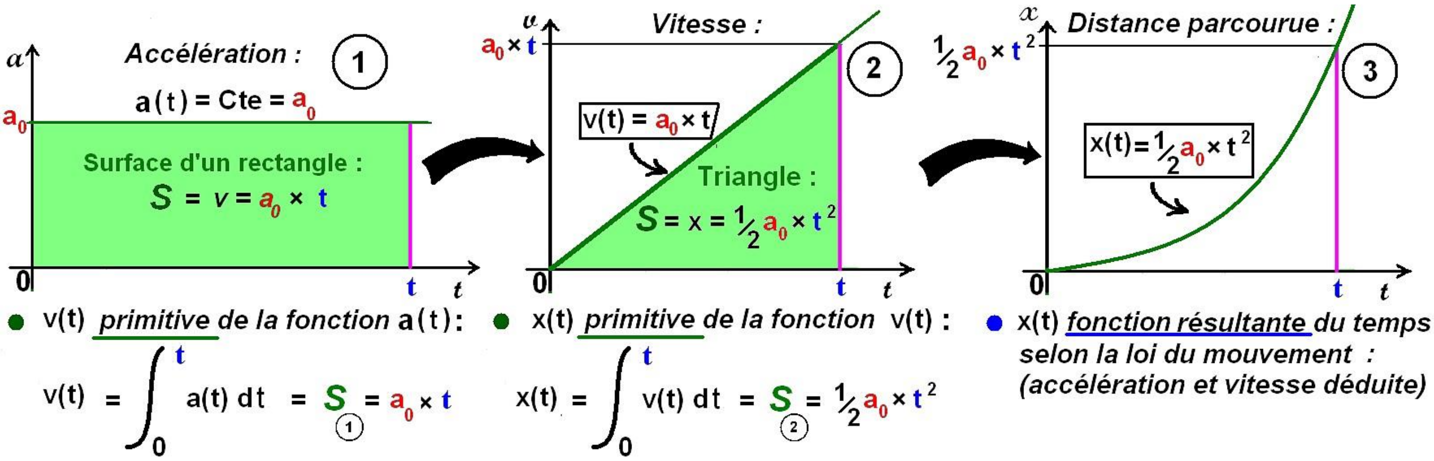
Effectivement, une telle équation peut s'écrire sous la forme « $F(x, y, y', y'', \text{etc}\ldots) = 0$ » avec $y = f(x)$, $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ les fonctions et leurs *dérivées* successives du 1[er], 2[nd] ordre et même au-delà

Rappelons que l'écriture condensée $y' = f'(x)$ remplace la forme dy/dx (***abordée durant l'épisode 6***)

Remarquons que lorsqu'il s'agit du temps t comme variable à la place de x, la forme condensée peut s'écrire avec un point au-dessus de la fonction dérivée première et même deux points en cas de dérivée seconde…

Justement, en guise de « ***mise en bouche*** », abordons la résolution d'une équation différentielle avec le temps comme variable ce qui permet d'introduire la fonction distance x (t) dont les dérivées premières et secondes ne sont autres que la vitesse v (t) et l'accélération a (t) respectivement.

(Dans l'autre sens, nous parlerons de v (t) comme primitive de x (t) et, respectivement a (t) primitive de v (t))



Résolution par intégration successives !

(Les signes × sont omis dans l'écriture mais les multiplications demeurent …)

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{(dt)^2} = a \iff d^2x = a\,(dt)^2$$

$$\text{Intégration : } \iint d^2x = \iint a\,(dt)^2 = \int\left[\int a\;dt\right]dt = \int\left[a\,t + B\right]dt = \tfrac{1}{2}a\,t^2 + B\,t + C$$

$$\text{conditions supplémentaires (aux limites) : } x(\underline{t=0}) = x_0 \quad \text{et} \quad v(\underline{t=0}) = \dot{x}(\underline{t=0}) = v_0$$

$$\textbf{d'où la solution } x(t) = \tfrac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t + x_0$$

Nous voyons donc les conditions aux limites permettre de déterminer **B** et **C**, qui sont des constantes issues de l'intégration en deux fois et, qui vont donc valoir $B = v_0$ et $C = x_0$

Exemple chiffré : Par exemple, mettons-nous dans la peau de **Galilée** (revoir toujours l'épisode 6) qui étudiait la chute des corps par l'intermédiaire d'un Plan incliné…

Supposons ce Plan incliné à 10%, l'accélération subie sera donc 10% de g soit 10% de 9,8 m/s² d'où a (t) constant (par hypothèse simplificatrice) valant a = 0,98 m/s² (gardons la bonne habitude d'écrire avec unités) et la vitesse initiale nulle (puisque le boulet est libéré depuis le repos) et la distance initiale également nulle.

La distance x (t) s'écrit donc « 0,49 t^2 » (ex : 0,49 m/s² × (4s)² = 0,49×16 m/~~s²~~×~~s²~~ soit 7,84 m parcourus en 4s)

Cas plus général d'une équation différentielle complète

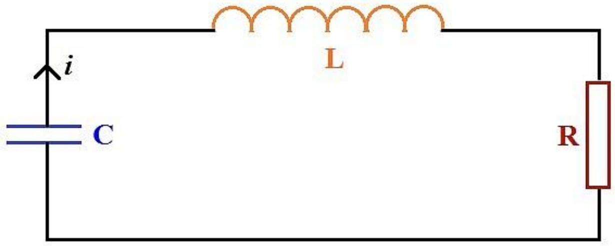
Nous avons vu précédemment une équation différentielle simplissime puisqu'il suffisait d'intégrer son terme unique de dérivée pour accéder à la solution.

Or l'équation différentielle, avons-nous dit, peut mélanger plusieurs types de dérivées. Elle n'est pas pure invention mathématique mais traduit en générale et « modélise » des phénomènes physiques, voire sociologiques (par exemple : évolution d'une population, comme vu dans l'épisode 5)

Les équations différentielles se sont développées au cours du XIXe siècle, mais ont nécessité pour cela de faire progresser les Mathématiques en rigueur et formalisme, grâce notamment au Suisse **Euler** (1707-1783) (vu à l'épisode 8) et **Lagrange** (1736-1813) français d'origine italienne

Exemple d'un circuit électrique dit « R,L,C)

Soit un circuit électrique muni d'un condensateur **C** *qui se décharge dans une bobine* **L** *couplée à une résistance* **R**



Dans une boucle de circuit, nous appliquons la propriété : $\boxed{\sum \text{des tensions } u = 0}$*; soit avec le courant i et la charge q :*

$$L\frac{d\,i}{d\,t} + R\,i + \frac{q}{C} = 0$$

Or, $i = \dfrac{d\,q}{d\,t}$ *(par analogie avec une vitesse* $v = \dfrac{d\,x}{d\,t}$*)*

En dérivant une deuxième fois, nous obtenons : $\dfrac{d\,i}{d\,t} = \dfrac{d^2q}{(d\,t)^2}$

d'où : $L\dfrac{d^2q}{(d\,t)^2} + R\dfrac{d\,q}{d\,t} + \dfrac{q}{C} = 0$

soit encore en allégeant l'écriture : $\boxed{L\,\ddot{q} + R\,\dot{q} + \frac{q}{C} = 0}$ *qui est bien une équation différentielle du* 2^{nd} *ordre*

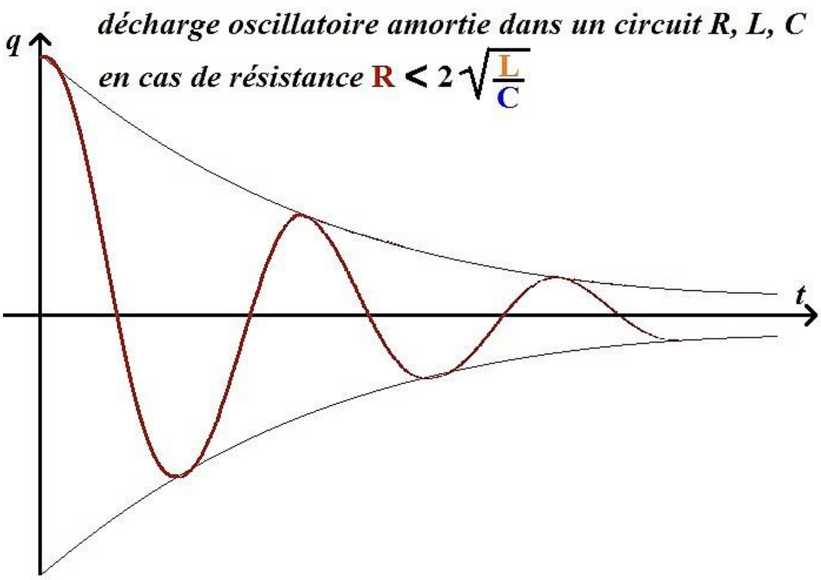
En posant $q = q_0 \times e^{r\,t}$ *avec e l'exponentielle et r un nombre qui peut tout aussi bien être complexe...*
Nous obtenons une équation intermédiaire dite caractéristique qui va nous aider pour résoudre la principale équation d'après les propriétés de l'exponentielle et ses dérivées, nous avons : $\ddot{q} = r^2 \times q$ *et* $\dot{q} = r \times q$

d'où l'équation caractéristique du 2^{nd} *degré :* $L\,r^2 + R\,r + \dfrac{q}{C} = 0$ *à résoudre...*

L'équation différentielle du 2^{nd} ordre F(x,y,y',y'') = 0 qui modélise le circuit électrique , produit donc pour sa résolution une équation caractéristique du 2^{nd} degré (nous avons appelé ici r la variable) que nous devrions savoir résoudre (en tout cas depuis la page 7 de ce document ☺)

Les racines de cette équation peuvent être soit réelles, soient complexes (avec partie « imaginaire ») car, en effet si le « discriminant » (le terme placé sous le signe « racine » dans l'expression des solutions, ici r_1 et r_2) est négatif (soit concrètement **R² < 4 L/C**, ce qui dénote une résistance **R** somme toutes un peu faible)…

les solutions s'écrivent sous la forme **r = a ± i b** (**i² = -1** (!)) (Revoir l'expression des complexes épisode 8)



Cela donne paradoxalement un résultat plus intéressant à étudier tant au point de vue mathématique que physique…

Nous voyons tout d'abord les deux courbes symétriques d'amortissement d'équation : « $q = q_0 \times e^{-rt}$ » encadrer les oscillations qui s'expriment sous la forme d'une somme de cosinus et sinus

(Revoir l'épisode 8 pour leur notation eulérienne)

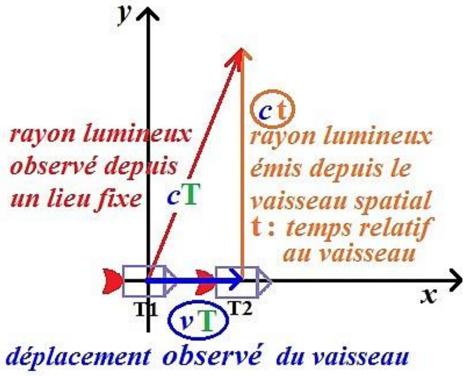
Il existe une infinité d'équations différentielles de toutes sortes qui ont donné lieu à d'importantes contributions de nombreux mathématiciens et physiciens, tant pour leur écriture que pour leur résolution.

Nous nous contenterons de leur rendre hommage…

La « célèbre et fameuse » équation d'Einstein

Sous la partie émergée médiatique, d'importants travaux de fond…

Einstein (1879-1955) n'a pas inventé la « Relativité » (Galilée avait commencé de l'énoncer) mais l'a réévalué au point d'élaborer deux théories (« relativité restreinte » de 1905 puis « relativité généralisée » de 1916) qui vont remettre en cause le modèle newtonien : masse, distance et temps ne sont plus immuables, hormis la vitesse de la lumière…



c : vitesse de la lumière
v : vitesse du vaisseau

Application Pythagore :

$(cT)^2 = (ct)^2 + (vT)^2$

$(c^2 - v^2)\times T^2 = c^2\times t^2$

$\left(\frac{\cancel{c^2}}{\cancel{c^2}} - \frac{v^2}{c^2}\right)\times T^2 = \frac{\cancel{c^2}}{\cancel{c^2}}\times t^2$

$\boxed{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\times T^2 = t^2}$

Les transformation de Lorentz sont :

$t = T \times \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ et $x = X \times \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$

(temps et distance relatifs contractés)

mais par contre la masse croît avec la vitesse

$$m = \frac{M}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Einstein a, en effet utilisé et synthétisé bon nombre d'équations écrites par ses prédécesseurs, dont le néerlandais **Lorentz** (1853-1928) et, osons le dire, s'est beaucoup appuyé sur son « intuition » pour mettre au point ses théories…

Il a peut-être osé certaines choses, à ses débuts, que ses prédécesseurs n'avaient pas osé faire et conclure…

puisque v très petit devant c :

$$\Delta m = m - M = M\times\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right) = M\times\left(\frac{1}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} - 1\right) \approx M\times\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)} - 1\right) \approx M\times\left(\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) - \cancel{1}\right)$$

il reste alors : $\Delta m \approx M\times \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$ *soit encore :* $\Delta m \times c^2 \approx M\times\frac{1}{2}v^2$ *(expression d'Energie cinétique)* *(pensez au souffle d'une explosion !)*

Plus généralement on aboutit, écriture simplifiée, à : $m\,c^2 \approx E$

Bon, fini de tergiverser ! ... $\boxed{E = m\,c^2}$

La « relativité… » de 1905 est dite « restreinte » car le modèle élaboré n'intégrait pas la ***Gravitation***

Il fallut à Einstein 10 ans de travaux soutenus pour compléter sa théorie afin de la généraliser pour toutes les lois de la Physique

Il n'hésita pas à « convoquer » l'aide de mathématiciens pour mieux intégrer par exemple la Géométrie riemannienne qui est une « géométrie différentielle » des espaces courbes et développer des outils mathématiques (avec Ricci et Levi-Civita) qui aboutirent au « Calcul tensoriel » qui généralise les « calculs vectoriels » et « calculs matriciels) (abordés dans cet épisode aux pages précédentes)

La persévérance d'Einstein mais aussi son audace lui permettent d'énoncer que :

C'est la « courbure de l'Espace » qui engendre un « champ de forces (ex : gravitation) » et non l'inverse !

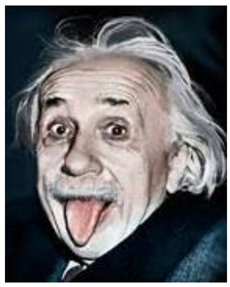
Ses travaux aboutissent à l'équation de champ dite « d'Einstein »

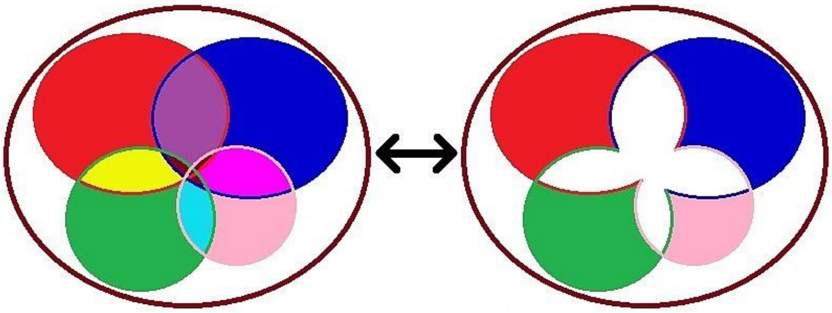
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

Cette équation est écrite à l'aide d'opérateurs « tensoriels » tels ***R, g et T***, (R sans indices désigne la courbure de l'espace) et K une constante gravitationnelle de couplage…

Pour paraphraser un petit astronaute, désormais c'est… « Vers l'Infini et au-delà ! »

Allez… Salut l'Artiste !





Economie basique en Société et en nos foyers

Quelques constats et outils mathématiques utiles

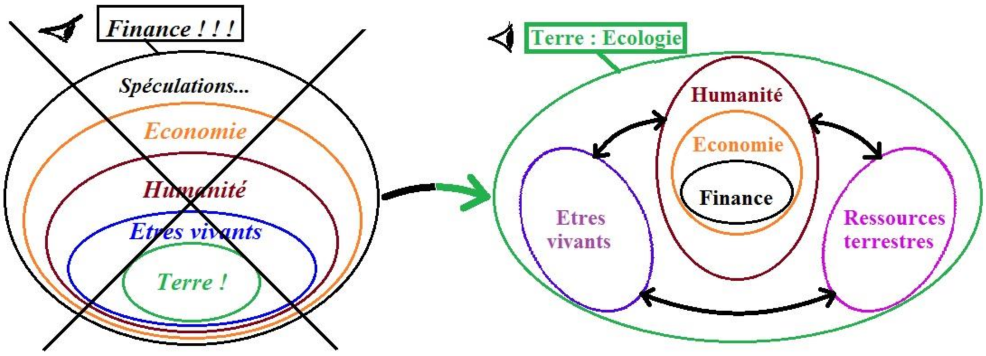
Introduction et définitions

Quelle est la signification première, c'est-à-dire étymologique du mot « économie ? Celui-ci est basé sur la racine « éco » qui signifie milieu (soit aussi bien notre foyer ou « maison » que… notre Terre) et le suffixe « nom-ie » qui désigne l'administration où la gestion.

Autrement dit, ***l'Economie est l'art de savoir gérer les affaires de notre « maison »***.

L'économie, est ce qui semble donc, à l'échelle internationale, gouverner de fait notre monde.

Est-ce si évident et logique que cela ? *D'autant plus qu'il semblerait ces dernières années que c'est plutôt la « **Finance** » qui gouverne l'Economie alors que la dite Finance n'a qu'un statut d'outil au départ…*



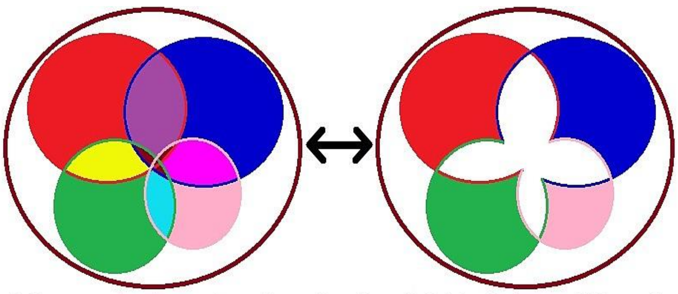
Prenons encore plus de recul que cela : en fait, l'Economie même n'est en réalité qu'une partie inclue dans l'***Écologie*** qui elle, est la véritable science de notre milieu à tous qui est la Terre.

< < < D'ailleurs, il serait peut-être temps de remettre les choses à leur place !

N'en déplaise à certain(e)s, l'Economie n'est pas une science – à savoir un ensemble de connaissances exactes et approfondies – soumise à une « épistémologie » qui puisse en critiquer aussi bien la valeur que son origine et sa portée. Non, elle repose avant tout sur des croyances, tout au plus des schémas de pensée élaborés par des économistes qui vont s'efforcer de se servir au mieux.

Le foyer, premier lieu de gestion économique

Puisque l'Economie consiste à savoir gérer un milieu quel qu'il soit, nous pouvons nous contenter de nous appuyer sur l'une de ses entités de base, à savoir un foyer.



2 adultes et 1 ado et 1 enfant "valent" 2,5 adultes célibataires

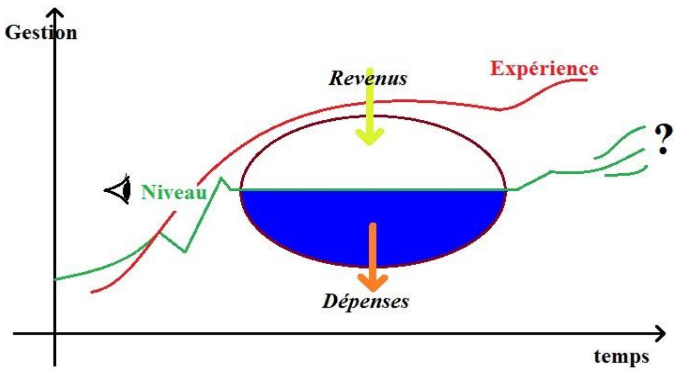
Il est bon de remarque que le nombre d'individus qui composent le foyer (de un à plusieurs donc) seront ramenés à des « unités économiques ». La détermination de ces unités est basée sur la considération des dépenses d'un point de vue statistique : l'**INSEE** (**I**nstitut **N**ational des **S**tatistiques et **E**tudes **E**conomiques) assimile par exemple un **foyer** composé de deux parents ou adultes à 1+0,5 soit 1,5 unités de consommation et chaque enfant supplémentaire rajoute 0,5 ou 0,3 unités selon *l'âge, supérieur ou non à 13 ans*.

Personnellement, je trouve la dégressivité un peu radicale : j'aurais tendance à comptabiliser les adultes comme 1 + ⅔ puis ½ à partir du 3ème et enfin ½ pour les adolescents et ⅓ pour les plus jeunes enfants

Comparons pour deux parents un ado et un jeune enfant : 1 + 0,5 + 0,5 + 0,3 = 2,3 unités pour l'INSEE

[La progression (1 , ⅔ , ½ , ⅓) m'est plus harmonieuse !] 1 + ⅔ + ½ + ⅓ = 2,5 unités («Jean ALAMI»)

Quoiqu'il en soit, une mère de famille avec deux jeunes enfants compte pour 1,6 parts (et non pas mes 1,666 théoriques) ce qui ne lui fait, par exemple, percevoir que 1,6 fois le RSA mensuel pour sa petite famille. De même un couple de deux adultes au RSA ne percevra que 1,5 fois le RSA individuel (~~1,666…~~)



* Comment gère-t-on les « affaires » de son « foyer » en « bon père de famille » – que l'on soit d'ailleurs célibataire ou père et mère d'une famille nombreuse – ?

Pardi ! Comme partout ailleurs… En équilibrant les **recettes** et les **dépenses**, mais également en faisant preuve de clairvoyance et de discernement >>>

- Les revenus et recettes <u>ne dépendent pas que</u> de notre bon vouloir ou volonté (*quoiqu'en disent les bien-pensants et « coaches » en tous genres*) tout comme nos dépenses. Les revenus, en dehors des dons en toutes espèces, dépendent aussi de la pérennité de notre emploi (ou d'un « bon » placement ?)

Les **dépenses** comprennent les dépenses <u>contraintes</u> par la Société ou nos différents bailleurs (sur lesquelles, on peut difficilement peser) <u>et du choix</u> de notre consommation.

L'être humain, comme tout être vivant sait s'adapter : lorsque les recettes tendent à faire défaut, il réoriente ou modère sa consommation, et lorsque les recettes se font plus généreuses… <u>l'être « clairvoyant » n'oublie pas de faire des réserves</u>.

Puisqu'il n'est pas question de faire un cours, encore moins mathématique, sur « comment gagner de l'argent », étudions plutôt comment « observer nos dépenses ».

*Nous avons déjà évoqué à l'épisode 5 comment tout simplement la « **sobriété** » nous permettait de faire des économies (sans négliger notre santé, au contraire même …)*

Contentons-nous cette fois-ci de jouer le rôle d'observateurs…

Inflation et pouvoir d'achat : de quoi parle-t-on ?

Notre pouvoir d'achat (au sens large du terme) dépend de l'évolution des prix en général et de l'adéquation ou non de nos revenus.

L'**INSEE** produit régulièrement, jusqu'à une fois par mois, un indice des prix qui produit ensuite un résultat officiel de l'Inflation (sur les 12 derniers mois, sur l'année écoulée…), et conserve les valeurs d'inflation – ou leur cumul – lors des années passées.

Aussi, pour « **faire très simple** » (ce qui va s'avérer même « <u>simpliste</u> » après enquête approfondie)

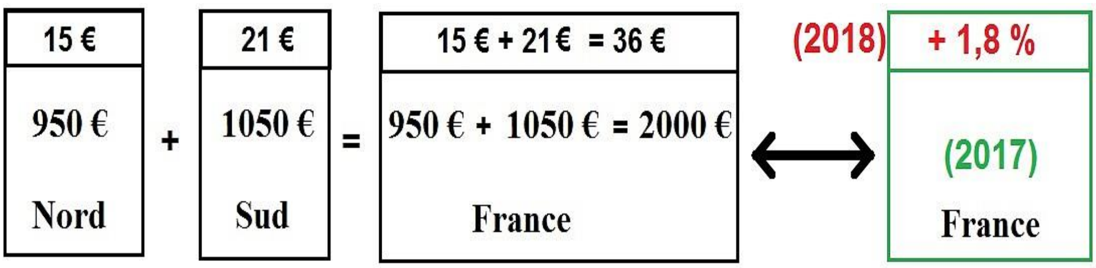
Si un même <u>ensemble de produits</u> valait par exemple un total de 1000 €, disons au 1er Juillet 2017, et qu'il soit constaté que ce même ensemble coûte désormais 1018 €, à la date anniversaire du 1er Juillet 2018, nous serions en droit de penser que l'Inflation constatée aura été de (1018 € – 1000 €) / (1000 €) = 1,8%.

- Or, ne perdons pas de vue que cette augmentation de 18 € sera la <u>moyenne de toutes les augmentations</u> constatées en France sur ce même ensemble de produits-type.

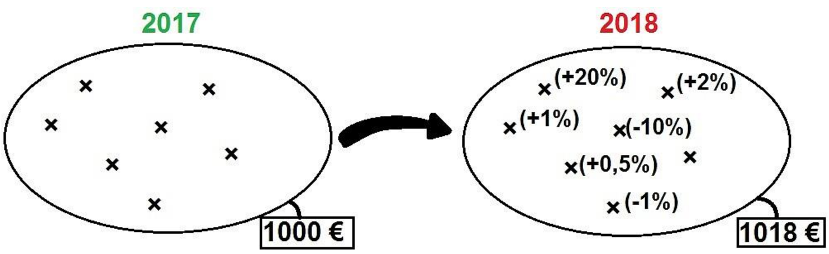
A supposer en effet que cet ensemble soit le même (en fait, il peut très bien être constitué de produits légèrement différents d'un lieu à l'autre, mais censés être « équivalents »), ces 18 € d'augmentation peuvent par exemple être la moyenne de 15 € constatés dans le « Nord » et 21 € constatés dans le Sud »

- De plus, cette première prise de conscience sur la « volatilité » des mesures doit en entraîner une autre : on parle d'augmentation du prix et non pas du prix lui-même :

Cela semble tout bête, la production d'un résultat unique d'inflation attribué à la France entière ! Mais vous commencez peut-être à <u>cerner davantage les disparités</u> que cela peut recouvrir en fait…



Accrochez-vous ! Vous n'êtes pas au bout de vos peines !



Après avoir cerné les disparités de prix pour un ensemble, qu'en est-il pour chacun (ou presque) des éléments qui constituent l'ensemble, objet d'étude ?

C'est bien le total qui a augmenté de 18 €, pourtant composés de produits divers dont les prix augmentent différemment, voire diminuent (ce qui est plus rare ☺)

Or, d'une année sur l'autre, <u>certains produits-type disparaissent</u> et sont alors remplacés par des produits de <u>substitution</u>, censés être « équivalents » ; mais si les produits remplacés ne sont pas strictement équivalents, l'INSEE corrige le prix de ces produits en faisant intervenir un « <u>effet qualité</u> ».

Comment ? D'abord de façon évidente (quoique…) : si désormais un produit de l'année passée ne se vend plus que par lots de 2, le prix est divisé par 2 (bien qu'on vous force à en acheter 2 d'un coup ! Non ?)

Mais **plus subtil**, c'est que si l'INSEE constate en effet que le nouveau produit apporte plus de services ou « qualité » ou fonctionnalités, l'évolution du prix est corrigée pour fournir un indice de prix net en qualité.

Exemple : un ordinateur type valait **1000 € en 2008** et vaut désormais … **1000 € en 2018.**

Croyez-vous que l'inflation de prix de ce produit sera considérée nulle en 10 ans ? Eh bien Non ! Elle sera même proche (« à la louche ») de … - 50 % (soit quand même l'équivalent de -7% par an : **$(0,5)^{1/10}$ = 0,933…**)

Car l'INSEE dispose d'un barème pour « quantifier » le « surcroît de services apportés » :

L'ordinateur qui disait « Papa, Maman » dit désormais « Papa, Maman, la Bonne, le chien de la voisine *dont vous n'avez que faire mais ça fait rien, ça compte quand même…*»

Forcément ces -7% annuels (et artificiels !) pèsent un tant soit peu sur le résultat global de l'inflation…

- *Même en « Alimentation », certes de façon moindre, les indices de prix sont ainsi corrigés.*

Certes, si ces calculs correctifs reposent sur des théories avancées, ces dernières sont soumises aux aléas de la mode ou de la politique,…Bref, cela découle plutôt d'une « pseudo-science ».

Par conséquent, si vous êtes le français « moyen » qui vit dans une localité « moyenne » et dont on attribue **1,8%** d'inflation à son « panier », il se peut très bien que ce dernier ait augmenté de **1000 € à …1022 €** , sous prétexte que des produits qui le composent aient apporté un « petit plus » par rapport à ceux de l'an passé.

Or, il s'avère que vous n'avez peut-être pas le choix et la possibilité de vous procurer le produit à « qualité égale » et, par conséquent, c'est bien 22 € de plus et non pas 18 € que vous déboursez.

- Or c'est bien sur l'indice de 1,8% dans notre exemple, que vont être revalorisés les minimas sociaux et le SMIC entre autres – et si ce dernier n'obtient pas en plus un petit coup de pouce – il y a bien une perte de pouvoir d'achat alors qu'officiellement elle n'existera pas ou aura été déclarée « compensée »…

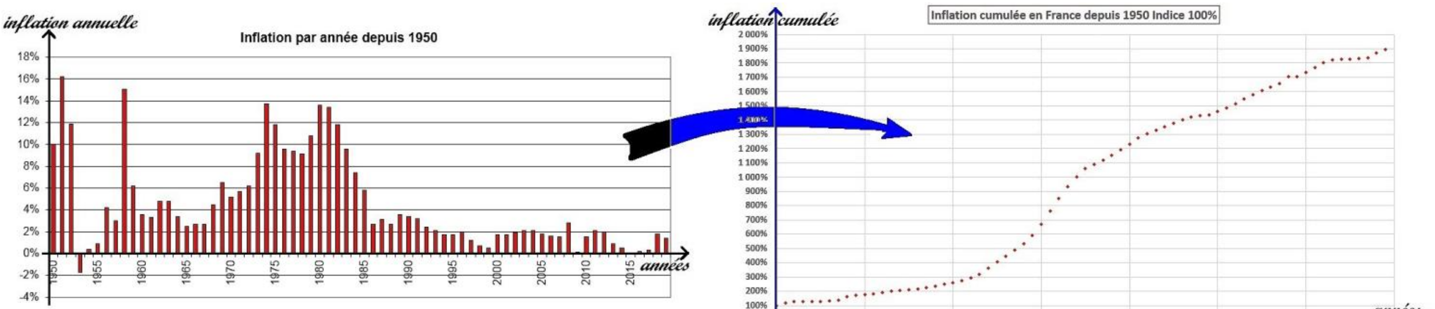
Inflation et pouvoir d'achat : expression des prix en unités corrigées de l'inflation

Donc, puisque nous sommes désormais un peu plus **lucides** mais… que nous n'avons pas le choix de composer autrement, contentons-nous de faire avec l'inflation officielle.

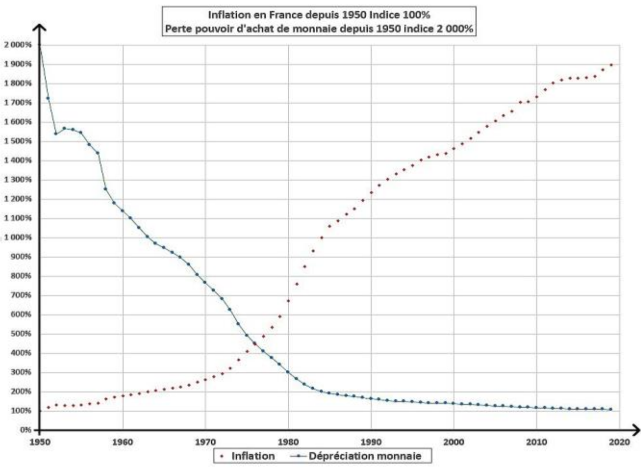
L'INSEE peut donc annoncer année après année, une inflation… annuelle :

Si nous n'avons pas accès à une inflation cumulée entre telle année de notre choix et telle autre année, il suffit d'appliquer la formule simple suivante (*Réviser épisode 3*) :

Inflation cumulée $\mathbf{I_{0>n}}$ (année 0 > année n) **=** $(1+I_1) \times (1+I_2) \times \ldots \times (1+I_n) - 1$ et s'écrit : $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+I_k)\right) - 1$



L'inflation cumulée depuis 1950 (par exemple) jusqu'à l'année considérée s'obtient en faisant le produit : $(1+I_1) \times (1+I_2) \times \ldots \times (1+I_n)$ qui se résume à écrire : $\prod_{k=1 \text{ à } n}(1+I_k) - 1$ avec I_1 correspondant à l'année 1951, I_2 → 1952,… et I_n → (1950+n)



Le pouvoir d'achat de la monnaie va, lui, progresser en raison inverse, selon l'adage…

« Pour 100 balles, t'as plus rien ! »

Ainsi, pour suivre le prix d'un même produit, au cours des années, nous pouvons ramener ses prix d'époque aux prix respectifs exprimée en € actuels en appliquant le correctif d'inflation cumulée.

Nous pourrons en déduire plus directement le pouvoir d'achat vis-à-vis de ce produit pour un revenu annuel (salaire ou pension ou placement) qui aurait été strictement indexé (revalorisé avec) sur l'inflation

Nous allons appeler cela « **exprimer les prix en Euros** (autrefois Francs) **« constants »**…

<u>Prenons donc le Cas récurrent de l'Achat d'une voiture neuve affichée au « Prix catalogue »</u>

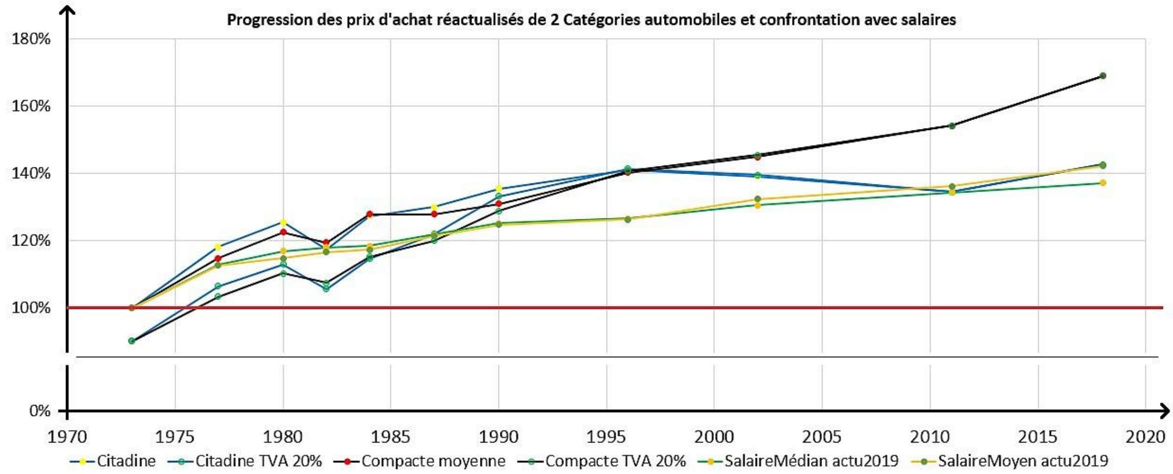
Nous avons suivi et moyenné le prix de deux catégories de voitures depuis 1973, date du 1er choc pétrolier :

1. Catégorie « **Citadine moyenne** » ou « **Catégorie S2** » qui regroupe à l'époque les **Renault R5 TL** ou **Peugeot 104 GL** et qui deviendront à notre époque **Clio** et **108** (nous nous sommes basés sur la <u>moyenne des prix du modèle avec moteur économique « essence » et avec équipement standard</u>
2. Catégorie juste au-dessus « **Compacte moyenne** » ou « **Catégorie M1** » qui regroupe à l'époque les **Simca 1100 GLS, Citroën GS Club, Renault R12 TL,** ou **Peugeot 304 GL** et qui deviendront à notre époque **Citroën C4**, **Renault Mégane** et **Peugeot 308** (également moyenne des prix des modèles avec moteur « économique essence » et avec équipement standard)

Voici le tableau suivant auquel <u>nous nous sommes permis d'adjoindre le correctif de TVA</u> (en 1973 de 33,3% et qui est devenue progressivement égale à 20%) pour mieux constater… que nous n'en avons pas profité !

Année	1973	1977	1980	1982	1984	1987	1990	1996	2002	2011	2018
Segmt S2 : R5, Clio, 104, 208	12 200 F	22 000 F	32 000 F	38 000 F	48 500 F	55 500 F	63 500 F	75 000 F	80 000 F	13 800 €	15 500 €
Conversion Francs/Euros cours	1,10748547	1,68798314	2,31798393	2,93877012	3,4592327	3,8752112	4,26330909	4,85282977	5,23822719	0,93194039	0,98619329
Prix Euros 2019	11 000 €	13 000 €	13 800 €	12 900 €	14 000 €	14 300 €	14 900 €	15 500 €	15 300 €	14 800 €	15 700 €
Prix Euros 2019 TVA 20%	9 900 €	11 700 €	12 400 €	11 600 €	12 600 €	13 400 €	14 700 €	15 600 €	15 400 €	14 800 €	15 700 €
Progression brute	100%	118%	125%	117%	127%	130%	135%	141%	139%	135%	143%
Progression corrigée TVA	90%	106%	113%	106%	115%	122%	133%	141%	140%	135%	143%
M1 :1100, 308, R12, Megane	14 300 F	25 000 F	36 700 F	45 350 F	57 000 F	64 000 F	72 000 F	87 800 F	97 800 F	18 500 €	21 500 €
Conversion Francs/Euros cours	1,10748547	1,68798314	2,31798393	2,93877012	3,4592327	3,8752112	4,26330909	4,85282977	5,23822719	0,93194039	0,98619329
Prix Euros 2019	12 900 €	14 800 €	15 800 €	15 400 €	16 500 €	16 500 €	16 900 €	18 100 €	18 700 €	19 900 €	21 800 €
Prix Euros 2019 TVA 20%	11 600 €	13 300 €	14 200 €	13 900 €	14 900 €	15 500 €	16 600 €	18 200 €	18 800 €	19 900 €	21 800 €
Progression brute	100%	115%	122%	119%	128%	128%	131%	140%	145%	154%	169%
Progression corrigée TVA	90%	103%	110%	107%	115%	120%	129%	141%	145%	154%	169%

- Il est d'ailleurs amusant de remarquer que la TVA de 33,3% désignait des produits « de luxe » et que désormais… vous aller constater que même avec une TVA réduite c'est toujours plus du luxe !



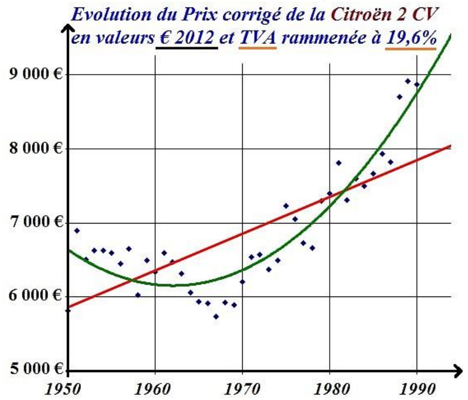
Voici donc le Graphique qui ramène tous les prix en **Euros 2019** et afin de mieux comparer avec le pouvoir d'achat, nous y avons adjoint les évolutions des salaires nets médians et moyens, toujours ramenés **en € 2019**

Nous pouvons constater une certaine envolée des prix – certes de façon moindre avec la catégorie plus modeste, et dans ce cas vous comprenez mieux pourquoi les gens se rabattent davantage sur celle-ci ! –

- Ce résultat d'envolée des prix sera officiellement corrigée par une <u>inflation moindre</u> sur les automobiles car évidemment, on nous rétorquera que les voitures ont forcément évolué en services rendus puisque « plus sécurisantes » (ABS généralisé depuis les années 2010,…) et plus confortables (équipement de confort accru…)

Eh bien tiens ! Voici, toujours ramené à des Euros constants (ici référence 2012), le prix de la 2 CV de base produite de 1948 à 1990 et qui, en conviendrez-vous, n'a pas évolué des masses…

(Après tout, c'est sans doute pour cela que nous en gardons la nostalgie…)



Interpolation des résultats nets par une droite et une parabole qui montrent ainsi la tendance...

Ce graphique retranscrit le prix de la 2 CV de base, corrigé de l'inflation cumulée jusqu'en 2012 avec deuxième correction de la TVA.

Ce qui permet de pouvoir directement comparer les prix pratiqués pour une 2 CV en regard de l'ensemble des prix !

Nous constatons qu'il était plus avantageux d'acheter une 2 CV à la fin des années 60, et qu'à partir des années 70, le Constructeur n'a cessé d'augmenter sa marge, en profitant du renouveau d'engouement du public vis à vis de ce modèle...

➢ Certes, le bilan global qualitatif des voitures reste positif, mais celui de l'industrie automobile française ?...

1. La TVA a baissé, pour compenser en quelque sorte les marges ou bien prix imposés par les constructeurs, et dans ce cas, moins de TVA, c'est aussi moins d'argent pour l'Etat et donc moins d'argent redistribué…
2. Les heures d'emploi pour produire chaque voiture ont été divisées par 2 à 3, et les emplois en France même par 3 ou 4 sur la période 1973-2018 ! Nous pouvons nous interroger en quoi ont-ils été convertis ?
3. Enfin, comme les voitures ont **pris du poids** – donc consommé davantage de matières – et imposent plus d'équipement à recycler en fin de vie, cela pèse d'autant sur notre Terre c'est-à-dire sur « notre Maison »

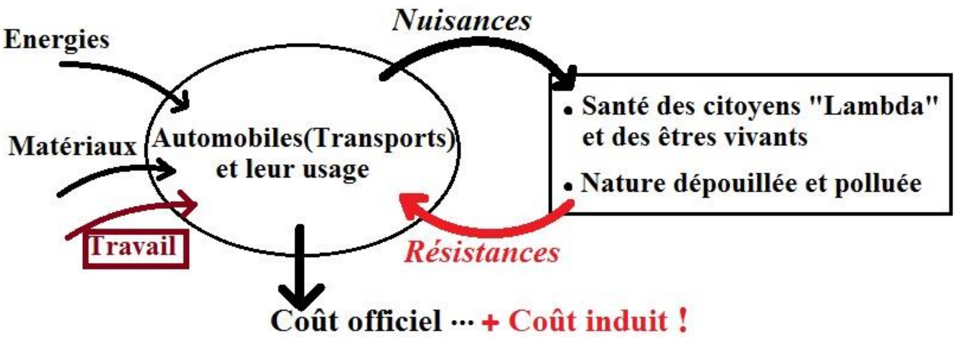
➢ Enfin les gens se plaignent régulièrement de l'envolée du prix du carburant – alors qu'il ne fait que fluctuer lorsque exprimé en Frs ou €uros constants depuis les années 80 – ! En fait, ils ne s'attaquent qu'à la partie émergée de l'Iceberg !

En effet, les dépenses en Carburant ne représentent que 20% (un 1/5ème) de toutes les dépenses occasionnées par la possession d'une voiture (Investissement, perte à la revente, frais d'entretien et de réparation, Assurance, Parking, Stationnement, amendes, péages autoroutiers…et Carburant !)

Cela va même selon l'usage de ⅓ (« gros rouleur ») à un 1/8 (faible usager d'une voiture de luxe par ex.)

Les gens ne réalisent pas en fait quel objet de luxe est en fait une voiture !

En fait, nous devrions agir pour remettre tout à plat dans notre société : est-ce normal de devoir imposer aux gens des milliers de kilomètres pour aller travailler ? (emplois délocalisés et non plus … « au village » comme avant et envolée des prix de l'immobilier entre autres causes de l'éloignement à la périphérie…)



Car le coût à l'environnement et à l'ensemble de ses habitants (en termes de santé), y compris les non-utilisateurs de voitures (de gré ou par raison… économique) n'est pas comptabilisé …

Le coût induit devrait être supporté par les usagers utilisateurs « pour leur confort ou agrément » **et** par les responsables de la « délocalisation » généralisée des emplois et des lieux de production des marchandises par rapport aux lieux de résidence effectifs ...

➢ Tout cela pourrait être chiffré et calculé « mathématiquement » mais à quoi bon, s'il n y a pas de prise de conscience collective avant même toute action...

Savoir tenir compte d'une certaine… obsolescence programmée

Maintenant que nous disposons du moyen de comparer les prix, à différentes époques, par la conversion en € (ou Francs assortis de la conversion 1 € = 6,55957 F) ramenés aux €uros$_{2019}$ donc en €uros constants, nous pouvons mieux préserver nos droits et intérêts.

Supposons en effet, que nous avions été les propriétaires d'une machine à laver achetée il y a 30 ans et qui ait coûté «avec nos €uros actuels 1000 €» et qui nous ait duré 20 ans : elle a été amortie à raison de 50 €/an. Simple à comprendre, toujours grâce aux €uros réactualisés…

Il y a 10 ans, vous rachetez une machine de la même marque et vous choisissez le modèle qui, comme le premier, vous semble du meilleur « rapport qualité-prix » et qui vous a coûté 750 €$_{2019}$ et… celle-ci vous lâche cette année, au bout de 10 ans (On ira même vous rétorquer que vous avez encore de la chance !) : simple également de comprendre que son prix amorti a été cette fois-ci de 75 € / an (soit bien 50% de plus !)

Mais pendant ce temps-là, l'INSEE aura déduit que de 1988 à 2008, le pouvoir d'achat sur ce modèle équivalent de machine à laver aura été : non pas -25% (1000€$_{2019}$ à 750€$_{2019}$) mais plutôt -33% environ du fait de « fonctionnalités » évoluées (*essore plus vite, dit « Papa Maman »…*)

En réalité, nous pouvons adjoindre l'inverse du coefficient d'usage pérenne (10 ans au lieu de 20 ans) ce qui fait une inflation déguisée de 100% et estimer que son **[prix d'achat / usage]** **à service égal** est :

(1 - 33%) × (1 / 50%) = 1,333 soit +33% au mieux et en véritables dépenses (1-25%) × (1 / 0,5) = 1,50 soit les 50% de plus que nous avons trouvé en passant de (1er achat) **50 €$_{2019}$** par an à… (2nd achat) **75 €$_{2019}$** par an

Donc désormais, pour être sûr de ne pas se faire avoir lors de l'achat, il faut mettre le Prix actualisé divisé par deux puisque les objets sont désormais estimés vous durer au mieux deux fois moins longtemps !

« Un Franc(ou Euro) de pauvre vaut moins qu'un Franc (ou Euro) de riche »

C'est François de Closets (essayiste et vulgarisateur) qui avait lancé, lors d'un journal télévisé il y a trente ans environ, cette « boutade » qui… s'avère ne pas en être une (!).

Car effectivement, grâce aux statistiques de l'INSEE (qui s'efforce d'affiner ses enquêtes avec le temps), nous pouvons le prouver.

Il suffit d'avoir à l'idée qu'une famille pauvre ne privilégiera pas les mêmes dépenses relatives, en raison de ses revenus limités, qu'une famille aisée ou très aisée qui dispose de plus de latitude…

L'inflation moyenne résulte du poids de chaque poste de dépense a_k(exprimé en % des dépenses totales) selon la formule (rappel) : Inflation $\mathbf{I} = \sum_{k=1 \text{ à } n} \left(\mathbf{a}_k(\%) \times \mathbf{i}_k(\%)\right)$ *avec* $\sum_{k=1 \text{ à } n} \mathbf{a}_k(\%) = 100\%$

Le signe « Σ» signifie « sommation » des produits indexés selon k variant de 1 à n

Aussi, comme cette répartition est forcément variable d'un foyer à l'autre, l'**INSEE** adopte la répartition constatée statistiquement pour les foyers dont le revenu par unité de consommation (revoir la 1ère page…) est égal au **revenu** (ou salaire qui est le revenu le plus courant parmi d'autres revenus) **médian**

« Médian » va signifier que 50 % des foyers français touchent moins et les 50 % restants… forcément plus.

Nous pouvons également revoir l'épisode 3 pour resituer le revenu « médian »

Or, nous avons maintenant accès à une répartition – selon revenus – des dépenses, et leur comparaison va nous apporter des enseignements précieux quant à la « volatilité » des dépenses choisies ou contraintes.

Inflation subie selon la répartition de ses dépenses

Postes de dépenses	Inflation du secteur	Proportions pour Foyers Revenu (10%)	part d'inflation	Proportions pour Foyers Revenu (50%)	part d'inflation	Proportions pour Foyers Revenu (90%)	part d'inflation
Aliments,boissons,tabac	3%	22%	0,66 %	19%	0,57%	15%	0,45 %
Habillement, chaussures	-1%	4%	-0,04 %	5%	-0,05%	6%	-0,06 %
Logement, eau, énergies	4%	21%	0,84 %	17%	0,68%	10%	0,40 %
Meubles, équip. maison	-5%	5%	-0,25 %	6%	-0,30%	8%	-0,40 %
Santé	3%	12%	0,36 %	11%	0,33%	10%	0,30 %
Transports(auto, autres)	2%	11%	0,22 %	14%	0,28%	16%	0,32 %
Télécoms	-5%	4%	-0,20 %	4%	-0,20%	3%	-0,15 %
Loisirs, Culture	2%	7%	0,14 %	8%	0,16%	11%	0,22 %
Hôtels, Restos, Cafés	4%	4%	0,16 %	6%	0,24%	9%	0,36 %
Autres biens, services	3%	10%	0,30 %	10%	0,30%	12%	0,36 %
		100%	2,19%	100%	2,01 %	100%	1,80%

Remarque 1 : Du fait que l'alimentation et le logement aient subi une inflation plus élevée que la moyenne globale, les revenus modestes (classés au rang 10%) le ressentent davantage

Remarque 2 : L'indice des prix est l'indice moyen pour produits de qualité standard ou qualité la plus diffusée.

Or, par exemple, les magasins dits « Low Cost » (« à bas coût »), du fait d'un accroissement de la clientèle par nécessité ou par choix de celle-ci, en a « profité » pour relever fortement ses tarifs il y a quelques années (*avec toujours cette loi d'« offre et demande » qui tourne très souvent au désavantage des consommateurs*) notamment en alimentation : Ainsi, si l'inflation moyenne en alimentation constatée était de 3 % annuelle dans ce secteur, en magasins « low cost » elle était devenue … le double (6%) !

Aussi les faibles revenus, en dehors d'un accès aléatoire à la banque alimentaire (don de nourriture), ont subi une inflation réelle de 6 % ce qui induit un différentiel supplémentaire de 0,66 % à l'inflation générale calculée, d'après les indices moyens par secteur, pour aboutir donc à 2,85 % réels au lieu de 2,19 %

Inversement, les hauts revenus, peuvent par moments, bénéficier de « coupons de fidélité » non comptabilisés par l'**INSEE** et qui font baisser leur inflation réelle…

Vous comprenez qu'à la longue, par rapport à une inflation officielle de 2 % (par exemple), les bas revenus dans leurs dépenses subiront une inflation de 3 %, alors que les plus hauts revenus la ramèneront vers 1 %

Une fois de plus, les résultats statistiques, comme celui de l'inflation, sont transmis par les Médias, sans la moindre incertitude assortie (comme nous venons de le faire) alors qu'on devrait transmettre par exemple :

Inflation annuelle **2±1 %** (soit « comprise entre 1 % à 3% » selon revenus) et non pas un simple 2 % !

Remarque 3 (« pour enfoncer le clou ! ») : les plus aisés, une fois toutes leurs dépenses effectuées , disposent encore de revenus convertis en capitaux qu'ils peuvent « placer » avec un rapport ± avantageux qui va compenser en partie l'inflation subie… Le différentiel d'inflation va encore se creuser…

- Nous devrions désormais mieux reconsidérer pourquoi certains se plaignent d'une « double injustice » en quelque sorte… ***sans le comprendre (?)***, peut-être eux, mais à juste titre en constatent l'amer résultat…

Observer et comparer deux contrats ou barèmes différents

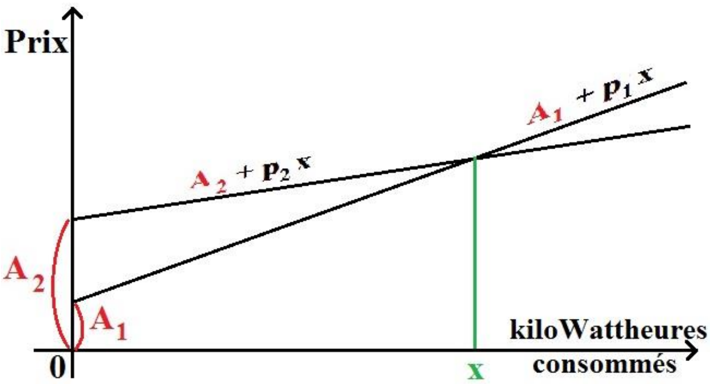
Depuis que nous sommes équipés en Électricité, mais plus encore du Gaz dans nos foyers, nous sommes amenés à choisir des barèmes de facturation selon notre niveau de consommation, et cette habitude a été instituée au départ par Gaz de France GDF, entre autres.

Bien souvent, le « conseiller » vous engage à adopter le tarif d'abonnement le plus élevé afin de… « bénéficier » de tarifs plus avantageux en kWh consommés.

Comment choisir en fait ? En appliquant tout simplement l'<u>équation</u> suivante qui mêle les Abonnements en

$A_1 + p_1 x = A_2 + p_2 x \Longleftrightarrow x = \frac{A_2 - A_1}{p_1 - p_2}$ *avec* $\begin{pmatrix} A_2 > A_1 \\ p_1 > p_2 \end{pmatrix}$ €uros (par mois ou par an) et les <u>prix par kWh consommé</u> :

(revoir l'épisode n°9 précédent sur les équations : ici une équation linéaire toute simple)



Très longtemps, en ce qui concerne **GDF**, la bascule s'effectuait à : x = 7000 kWh.

Or, progressivement, avec **GDF Suez** puis **Engie**, le « x vrai » a été ramené en dessous de 6000 kWh, voire 5500 kWh… Allez comprendre !

En ce qui me concerne, en passant de 8000 kWh à 3000 environ (voir Episode 5 sur la sobriété), j'ai définitivement conforté mon choix de barème **1**

L'emprunt (*lorsqu'il n'est pas possible de faire autrement*)

Un certain montant (appelé « Capital ») est prêté à une certaine époque et lorsqu'il remboursé plus tard, il faut compenser la perte de pouvoir d'achat de la monnaie (comme vu, précédemment) ; il est donc normal de rembourser à terme un peu plus tard davantage d'unités, dans la majeure partie des cas.

Aussi, un emprunt « d'ami à ami »conviendrait d'être remboursé, *afin de ne léser personne*, en tenant compte de l'inflation qui s'est cumulée sur la période qui s'est déroulée entre le moment du prêt et le moment du remboursement final.

Exemple : Si un prêt de 5000 Euros est accordé telle année et qu'il est remboursé en une seule fois dix ans plus tard, période durant laquelle s'est cumulée une inflation de 20 %, il conviendrait donc qu'il soit remboursé (100 %+20%)×5000 € soit 6000 €, afin de ne pas donner le sentiment de « payer en monnaie de singe »

Autrefois, il était d'usage de « prêter sans intérêts » ce qui n'était donc pas forcément le parti le plus juste, hormis si le prêt était tout au plus remboursé l'année suivante, vu qu'on ne parlait pas trop d'inflation à l'époque…

Inversement il y a les « usuriers » qui pratiquent des taux faramineux comme par exemple 15 à 20 % dans le passé… (On les appelle « usuriers » pour ne pas les appeler … « truands »)

A côté des prêts entre « amis » (attention, vous risquez aussi bien de perdre les amis comme l'argent ☹ !), il y a bien sûr les banques et les organismes affiliés qui vous prêtent à un taux qui, *« pour couper la poire en deux »*, devrait tout au plus être limité à deux fois l'inflation, voire à peine plus que l'inflation, si celle-ci est déjà élevée (afin de compenser également les frais de personnel, de charges diverses et … part de « risque »).

Soit T (%) le taux annuel pratiqué (tout compris tel qu'un prêt P soit remboursé en une seule fois l'année suivante à R = P × (1+T) tout simplement) :

1. S'il est remboursé en une seule fois au bout de n années, il sera remboursé $R = P \times (1+T)^n$

2. Si le remboursement a lieu sur cette même période tous les mois, alors il faut tenir compte de la dépréciation effective pour chaque mois : le taux mensuel t est tel que $(1+t)^{12} = (1+T)$ soit : $t(\%) = (1+T)^{1/12} - 1$

Exemple si T = 6,17 % de taux annuel, nous obtiendrons t = 0,5 % de taux mensuel car $(1+0{,}5\ \%)^{12} \sim (1{,}0617)$

Le remboursement va se faire par mensualités m au cours de n années :

$$P = \frac{m}{(1+t)} + \frac{m}{(1+t)^2} + \frac{m}{(1+t)^3} + \cdots + \frac{m}{(1+t)^{12\times n}}$$

en factorisant dans le second membre par $\frac{m}{(1+t)}$

$$P = m \times \frac{1}{(1+t)} \times \left(1 + \frac{m}{(1+t)} + \frac{m}{(1+t)^2} + \cdots + \frac{m}{(1+t)^{12\times n-1}}\right)$$

Nous avons affaire à une "Série" récurrente à progression géométrique, où nous reconnaissons le terme générique appelé "raison" : $q = \frac{1}{(1+t)}$

La somme des termes qui composent le 2nd membre : $1 + q + q^2 + \ldots + q^{12\times n - 1}$ est connue et vaut dans notre cas $\frac{1 - q^{12\times n}}{1 - q}$

Il s'agit alors de remplacer q par son expression sous forme de fraction, en ne perdant pas de vue que $q^{12\times n} = \frac{1}{(1+t)^{12\times n}}$ puis, en pratiquant l'addition de fractions... Allez ! Courage !

$$P = m \times \frac{1}{(1+t)} \times \frac{1 - \frac{1}{(1+t)^{12\times n}}}{1 - \frac{1}{(1+t)}} = m \times \frac{1}{\cancel{(1+t)}} \times \frac{\frac{(1+t)^{12\times n} - 1}{(1+t)^{12\times n}}}{\frac{(\cancel{1}+t)\cancel{-1}}{\cancel{(1+t)}}}$$

et puisque $(1+t)^{12\times n} = (1+T)^n$: $\boxed{P = m \times \frac{(1+T)^n - 1}{t \times (1+T)^n}}$

versement la mensualité vaut : $\boxed{m = P \times t \times \frac{(1+T)^n}{(1+T)^n - 1}}$

Le total remboursé sera donc $R = 12\times n\times m$

La part d'intérêts cumulés sera égal à $R - P$

soit en remplçant m par son expression en P :

$$\Delta i = P \times \left(\frac{12\times n \times t \times (1+T)^n}{(1+T)^n - 1} - 1\right)$$

$$= P \times \left(\frac{12\times n \times t \times (1+T)^n - (1+T)^n + 1}{(1+T)^n - 1}\right)$$

$$\boxed{\Delta i = P \times \left(\frac{(1+T)^n \times (12\, n\, t - 1) + 1}{(1+T)^n - 1}\right)}$$

Ces formules sont valables, bien entendu, pour un Prêt à « Taux Fixe » (Le même taux appliqué tous les ans)

- Il y en a qui aiment bien jouer avec le feu en souscrivant des prêts à taux variable ou indexés sur … ce que les prêteurs ont décidé... Comment voulez-vous faire preuve de clairvoyance, si vous n'avez même pas de vision sur l'évolution des taux ?

Maintenant, abordons la durée de l'emprunt

Deux critères permettent de s'y repérer : **1 Le montant des intérêts / Prêt** * **2** Le montant du Prêt / Prêt maxi

1. Il n'est pas raisonnable de devoir rembourser plus d'intérêts que de Prêt octroyé

il faut donc se limiter à : $\boxed{\Delta i = P \text{ (au maximum)}}$

Soit (en simplifiant par P) : $(1+T)^n \times (12n\times t - 1) + 1 = (1+T)^n - 1$

> $(1+T)^n \times (12n\times t - 2) = -2$

Divisons les deux membres par (-2) : $(1+T)^n \times (1 - 6n\times t) = +1$ ***(E1)***

Mettons à profit notre « maîtrise de la Fonction « Log » (depuis l'épisode 8) :

Il en découle une nouvelle équation équivalente à (E1) : **Log [$(1+T)^n \times (1 - 6n\times t)$] = Log(1) = 0** ***(E2)***

En appliquant les propriétés des Logarithmes, nous obtenons : **n Log (1+T) + Log (1-6n×t) = 0** ***(E2')***

Il s'agit bien de l'addition de deux termes de signe opposé qui peuvent s'annuler selon la valeur de n

En effet **Log (1+T%)** est toujours positif (puisque supérieur à 1) et **Log (1 - 6n×t)** est toujours négatif

Cependant, pour que Log reste défini, il faut néanmoins ***que (1 – 6n×t) reste positif*** impliquant **n < 1 / (6t)**

Ex : T = 6,17 % et donc t = 0,5 % il faut donc que n < 1 / (6×0,5%) soit n < 1/3 % soit au final n < 33,33 ans

L'équation (E2ou E2') peut se résoudre par approches successives de la valeur de n (pour ceux qui disposent d'un logiciel « tableur » ou d'une calculatrice programmable, on applique la fonctionnalité « valeur cible »)

A la main, essayons n = 30 >>> Au lieu de Zéro dans le second membre, on va trouver -0,507

Pour n = 25 >>> Au lieu de Zéro dans le second membre, on trouve : 0,110

Cela veut dire que 30 années, c'est trop, 25 années juste en dessous, la solution sera donc proche de n = 26

On peut d'ores et déjà conclure en fait que 25 années de Prêt à ce taux est le maximum raisonnable

2. Si nous disposons d'une capacité de remboursements, quel est l'emprunt maximal dont nous pouvons disposer ?

On pourrait nous rétorquer que plus la durée du Prêt est longue, davantage celui-ci octroyé est élevé.

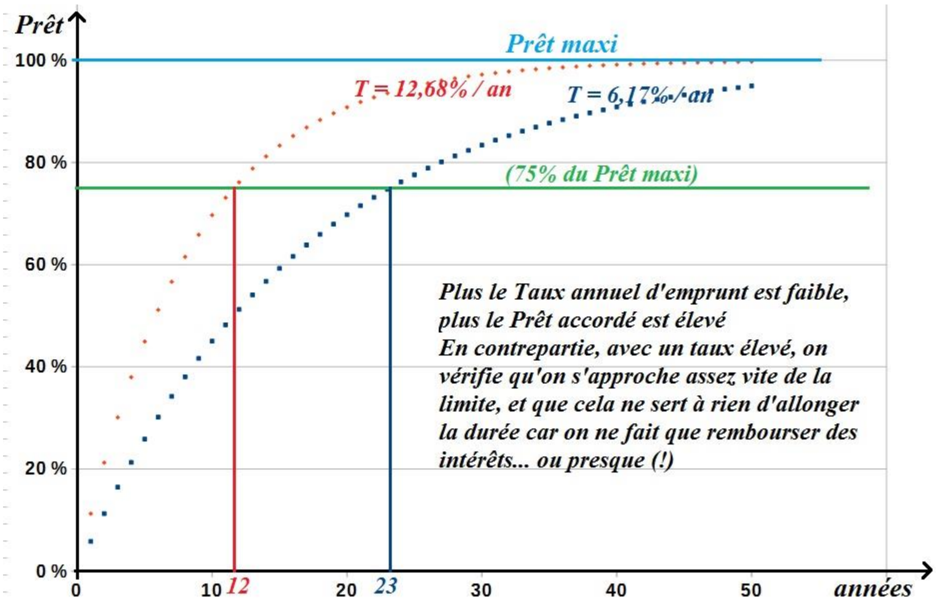
Mais cela en vaut-il la chandelle et jusqu'à quel point ?

A supposer que nous disposions d'une durée infinie de remboursement (il y en a qui rêvent à l'immortalité de l'homme sur Terre… les pauvres!), le prêt maxi accordé sera la limite de l'expression du Prêt (voir page ci-dessus) en faisant tendre n vers une valeur infinie…

Dans ce cas, il n y a pas trop de différences entre **$(1+T)^n$** et **$(1+T)^n - 1$** (!) et du coup diviser « quelque chose de très grand » par ce « même quelque chose » **devient neutre, c'est-à-dire égal à 1**

Donc le prêt maxi accordé sera proche (*égal à l'infini*) de m / t

- Toujours avec t = 0,5 % (T = 6,17%) cela revient à obtenir 200 fois (1 / 0,5%) le montant de la mensualité soit **P maxi = 200 × m**



Or sur 10 ans, P octroyé vaut $(1+6{,}17\%)^{10}$ / $((1+6{,}17\%)^{10} - 1)$ = environ 45 % du Pmaxi

Sur 20 ans P octroyé vaut déjà 70 % et pour 30 ans = il atteint 83 % de P maxi

<<< Sur le dessin ci-contre, nous avons fait figurer un 2ème exemple de Taux (sur la base de t >>> 2t = 1%)

En fait la progression est d'autant plus rapide puis ralentit d'autant plus vite que le Taux pratiqué est élevé…

Encore une fois, 25 ans est amplement suffisant quelque soit le Taux, même si ce dernier est faible

En effet, des taux hypothétiques de prêt plus faibles permettent donc d'obtenir des prêts maximaux plus élevés et d'en obtenir 75% après de longues années de remboursement…

Le temps nécessaire pour atteindre 75 % du Prêt maxi : **$((1+T)^n - 1)/(1+T)^n = 3/4$ ou $(1+T)^n = 4$** ; en passant par la fonction Logarithme…

n vérifie : $\boxed{\mathbf{n = Log\ 4 / Log\ (1+T)}}$

Ainsi pour un Taux « super avantageux » **de 3% annuel** tout compris, non seulement on peut obtenir au moins **400 fois sa mensualité** fixe de remboursement, mais viser **46 ans au moins** d'années de remboursement avant d'en atteindre les 75% !

Certains sont bien sûr tentés d'y souscrire (c'est ainsi qu'on a vu fleurir il y a quelques années des prêts sur 40 et même 50 ans…)

Mais en prenant du recul à tout cela, Mathématiques comprises, est- il raisonnable de faire peser sur la génération suivante, les affres d'un remboursement pour toute une vie, ou supposer quoiqu'il arrive pouvoir tout rembourser avant terme ?

25 ans c'est bien une génération humaine… Contentons-nous de la nôtre, **évitons de *peser sur la suivante !***

*

* *

Et même mieux : « Quand on aime, on a toujours 20 ans ! »

☺